CAPITOLO 4

DISPERSIONE DI INQUINANTI IN ATMOSFERA

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.1 Diffusività e avvezione

Qualsiasi processo di conversione dell'energia comporta un certo grado di **inquinamento**, sia durante la conversione stessa (ad esempio per effetto diretto della combustione dei combustibili fossili), sia nella produzione degli impianti (ad esempio per l'uso di sostanze chimiche potenzialmente tossiche nella fabbricazione di celle solari).

Sebbene molte sostanze chimiche possano essere riutilizzate o rese innocue, una parte viene inevitabilmente rilasciata nell'ambiente.

Analizziamo i meccanismi con cui gli inquinanti si disperdono nell'ambiente.

Gli inquinanti sono generalmente trasportati all'interno di un mezzo, come aria, acqua o suolo. Li indicheremo come **particelle ospiti**, anche quando si presentano come singole molecole, mentre il fluido che li trasporta sarà chiamato **mezzo**.

Il processo più semplice è **la diffusione**. In questo caso, la differenza nella concentrazione delle particelle ospiti, o più precisamente nel loro gradiente di concentrazione, è la forza trainante della dispersione.

Supponiamo di avere una massa di una sostanza inquinante (ospite) localizzata in una certa regione del mezzo (ad esempio l'aria).

Nel tempo, questa massa tende a disperdersi nello spazio, anche se il mezzo è macroscopicamente in quiete.

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.1 Diffusività e avvezione

Il processo è dovuto alle collisioni tra molecole ed è influenzato dalle loro dimensioni. Se le dimensioni della molecola ospite sono paragonabili a quelle delle molecole del mezzo, si parla di **diffusione molecolare**. Se invece le particelle sospese sono significativamente più grandi, si parla di **moto browniano**.

In generale, la diffusione molecolare ha un ruolo relativamente limitato nella dispersione degli inquinanti.

La **concentrazione** $C(x, y, z, t) = C(\vec{r}, t)$ di una sostanza è definita come la massa M, divisa per il volume del campione V in cui è dispersa:

$$C(\vec{r}, t) = \frac{M}{V}$$

Assumiamo che il volume $V \gg a^3$, dove a è la distanza media tra le particelle ospiti.

Supponiamo che la concentrazione $C(\vec{r}, t)$ sia una funzione continua e differenziabile.

Infine, assumiamo che $C(\vec{r}, t)$ sia sufficientemente bassa da poter trascurare le variazioni di massa degli elementi di volume infinitesimi dovute alla diffusione.

Definiamo un **flusso** $\vec{F}(\vec{r}, t)$, diretto lungo il moto delle particelle ospiti: il suo modulo $|\vec{F}|$[kg m^{-2} s^{-1}] rappresenta la massa che attraversa un'unità di area per unità di tempo, nella direzione di $\vec{F}$.

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.1 Diffusività e avvezione

La relazione tra $\vec{F}(\vec{r},t)$ e la concentrazione $C(\vec{r},t)$ è nota come **legge di Fick**:

$$\vec{F} = -D\vec{\nabla}C$$

La costante D è chiamata **diffusività**, o **coefficiente di diffusione**. La legge di Fick può essere derivata rigorosamente dalla teoria cinetica dei gas, che dà la dipendenza di D anche dalla temperatura e dalla pressione.

Valori di coefficienti di diffusione

	$D/[\mathrm{m^2\ s^{-1}}]$
In air	
CO_2	16.4×10^{-6}
H_2O vapour	25.6×10^{-6}
C_6H_6 (benzene)	8.8×10^{-6}
In water	
CO_2 (water of 20 [°C])	1.60×10^{-9}
N_2	2.34×10^{-9}
H_2S	1.36×10^{-9}
NaCl (water of 20 [°C])	1.3×10^{-9}

La legge di Fick è analoga all'equazione del calore, che esprime la proporzionalità tra il flusso di calore e il gradiente di temperatura.

Per ricavare un'equazione differenziale per $C(\vec{r},t)$, consideriamo un volume arbitrario V.

Il flusso netto di particelle che escono da tale volume può essere espresso tramite il teorema della divergenza, secondo cui il flusso di $\vec{F}$ attraverso una superficie chiusa è uguale all'integrale della divergenza di $\vec{F}$ sul volume racchiuso.

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV \ [\mathrm{kg\ s^{-1}}]$$

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.1 Diffusività e avvezione

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV$$

La conservazione della massa implica che questo deflusso sia uguale alla diminuzione della massa all'interno del volume:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V C \ dV$$

Uguagliando le due espressioni:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F}\, dV = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V C \ dV$$

Poiché questa relazione deve valere per qualunque volume, si ottiene la forma locale:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$$ con $\vec{F}$ [kg m^{-2} s^{-1}] flusso delle particelle ospiti.

Consideriamo ora un mezzo in movimento con velocità $\vec{u}$. In questo caso, il flusso $\vec{F}$ include una componente di trasporto dovuta al moto del fluido, pari a $\vec{u}\, C$, poiché le particelle sono trascinate dal flusso.

Questo fenomeno è noto come **avvezione**.

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.1 Diffusività e avvezione

Ne segue che il flusso totale include un ulteriore contributo:

$$\vec{F} = -D\vec{\nabla}C$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$$

$$\vec{F} = \vec{u}C \ - D\vec{\nabla}C$$

L'equazione di conservazione diventa quindi:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}C) - \vec{\nabla} \cdot \left(D\vec{\nabla}C\right) = 0$$

Utilizzando la proprietà dell'operatore divergenza, possiamo riscrivere $\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}C)$ come:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)f + \vec{A} \cdot \vec{\nabla}f$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}C) = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right)C + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}C$$

Sostituendo, si ottiene:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\right)C + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}C - \vec{\nabla} \cdot \left(D\vec{\nabla}C\right) = 0$$

Analizziamo il termine $\nabla \cdot \vec{u}$ .La divergenza del campo di velocità descrive la variazione locale del volume del fluido: $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ indica un **fluido incomprimibile**, che non si espande né si comprime. Nel caso dell'atmosfera, questa è spesso una buona approssimazione, e si può assumere $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ (incluso il caso limite $\vec{u} = 0$).

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.1 Diffusività e avvezione

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})C + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} C - \vec{\nabla} \cdot (D\vec{\nabla} C) = 0$$

Se inoltre il coefficiente di diffusione D è costante nello spazio, l'equazione si semplifica in:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} C = D\vec{\nabla}^2 C$$

Il termine a sinistra rappresenta la variazione temporale della concentrazione e il trasporto per avvezione. In particolare, $\frac{\partial C}{\partial t}$ descrive la variazione locale nel tempo in una posizione (x, y, z), mentre $\vec{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{\nabla C}$ descrive il trasporto dovuto al moto del fluido, ovvero l'**avvezione**.

Supponiamo di seguire il flusso nelle tre direzioni e osservare il cambiamento di concentrazione nel tempo lungo x, y e z.

In questo caso possiamo scrivere $C = C\big(x(t), y(t), z(t)\big)$, dove la dipendenza temporale delle coordinate è tale che:

$$\frac{dx}{dt} = u_x, \qquad \frac{dy}{dt} = u_y, \qquad \frac{dz}{dt} = u_z$$

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.1 Diffusività e avvezione

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} C = D \vec{\nabla}^2 C$$

Il cambiamento di concentrazione nel tempo lungo una traiettoria del fluido è quindi dato dalla derivata totale di $C = C\big(x(t), y(t), z(t)\big)$:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\partial C}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial C}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial C}{\partial t} = \vec{\nabla} C \cdot \vec{u} + \frac{\partial C}{\partial t}$$

che coincide proprio con il membro sinistro dell’equazione precedente.

Combinando le due espressioni si ottiene:

$$\frac{dC}{dt} = D \vec{\nabla}^2 C$$

Questa equazione è valida quando il mezzo è incomprimibile ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$) e il coefficiente di diffusione D è costante nello spazio.

Si noti che l’equazione ottenuta ha la stessa forma dell’equazione della diffusione del calore. Ciò implica che, a parità di condizioni fisiche, le soluzioni matematiche sono analoghe.

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.2 Emissione istantanea in atmosfera

Consideriamo un mezzo omogeneo a riposo ($\vec{u} = 0$) e assumiamo il coefficiente di diffusione D costante. Supponiamo inoltre che la concentrazione dipenda solo da x e t, cioè $C = C(x, t)$, ed è indipendente da y e z.

$$\frac{dC}{dt} = D\vec{\nabla}^2 C$$

L'equazione di diffusione si riduce quindi a: $\dfrac{dC}{dt} = D\dfrac{\partial^2 \mathrm{C}}{\partial \mathrm{x}^2}$

Una soluzione di questa equazione è una **funzione gaussiana**:

$$C(x,t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

come si può verificare per sostituzione.

Introducendo $\sigma = \sqrt{2Dt}$, la soluzione può essere riscritta nella forma standard:

$$C(x,t) = \frac{Q}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Nel limite $\sigma \to 0$, $C(x,t) \to Q\delta(x)$, dove $\delta(x)$ è la funzione delta di Dirac.

Il limite $\sigma \to 0$ coincide anche con il limite $t \to 0$, e quindi:

$$C(x, t \to 0) \to Q\delta(x)$$

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

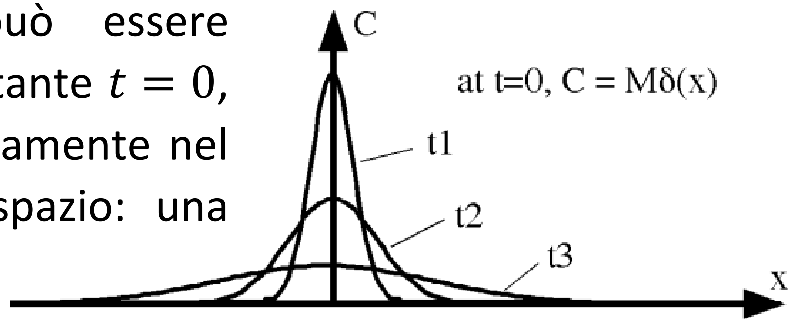
4.1.2 Emissione istantanea in atmosfera

$$C(x,t) = \frac{Q}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$\sigma = \sqrt{Dt}$$

$$C(x, t \to 0) \to Q\delta(x)$$

Di conseguenza, la soluzione gaussiana può essere interpretata come la situazione fisica in cui, all'istante $t = 0$, una quantità $Q[kg\, m^{-2}]$viene rilasciata istantaneamente nel piano $x = 0$, senza estensione iniziale nello spazio: una **sorgente piana istantanea**.



In altre parole, tutta la massa è inizialmente concentrata in un piano e successivamente si distribuisce nello spazio per effetto della diffusione.

Per tempi $t > 0$, la concentrazione si diffonde simmetricamente, mantenendo costante la quantità totale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C(x,t)dx = Q$$

La distanza quadratica media $< x^2 >$ percorsa dalle particelle ospiti sarà:

$$< x^2 >= \sigma^2 = 2Dt$$

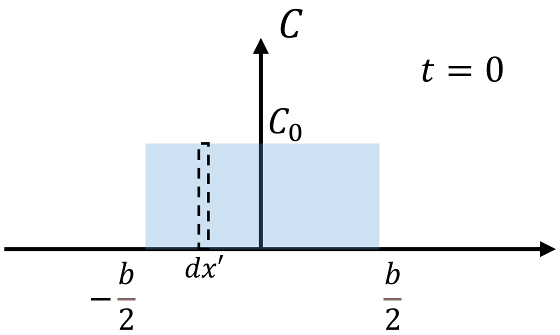
4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.3 Nuvola di dimensioni finite

Consideriamo una "**nuvola**" di particelle rilasciata all'istante $t = 0$, nelle stesse condizioni di prima ($\vec{u} = 0$, D costante).

Per semplicità, assumiamo condizioni iniziali del tipo:

$$\begin{cases} C = C_0 \quad \text{per} \quad -\dfrac{b}{2} < x < \dfrac{b}{2}, & t = 0 \\ C = 0 \qquad \text{altrove}, & t = 0 \end{cases}$$



Questa configurazione rappresenta una nuvola omogenea centrata nel piano $x = 0$, estesa all'infinito nelle direzioni y e z. Di conseguenza, la diffusione avviene solo lungo la direzione x, perpendicolarmente al piano.

Per risolvere il problema, si può interpretare la nuvola iniziale come una **sovrapposizione continua di sorgenti piane istantanee** (funzioni delta), ciascuna di intensità $C_0\, dx$[kg m^{-2}], localizzata tra x e $x + dx$.

In questo caso, il limite $t \to 0$ diviene:

$$C(x, t \to 0) \to Q\delta(x)$$

$$C(x, t \to 0) \to C_0 \delta(x - x')dx'$$

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.3 Nuvola di dimensioni finite

$$C(x, t \to 0) \to C_0 \delta(x - x')dx'$$

$$C(x,t) = \frac{Q}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Di conseguenza, la soluzione trovata nel caso precedente, applicata a una sorgente infinitesima di ampiezza dx', posta a distanza $(x - x')$ dal punto di osservazione, diventa:

$$\frac{C_0 dx'}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2}}$$

La soluzione completa sarà:

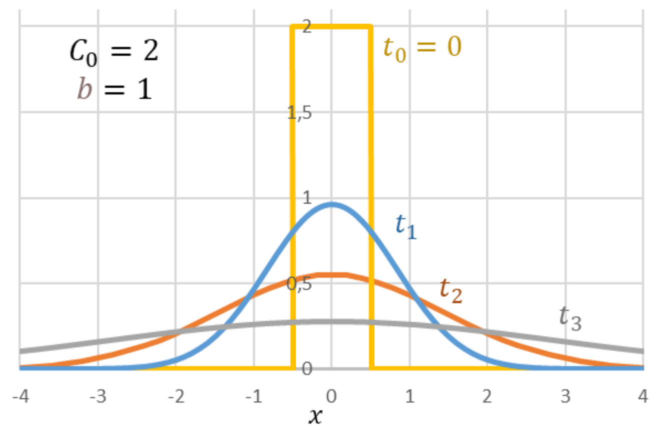
$$C(x,t) = \frac{C_0}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma^2}} dx'$$

dove la dipendenza temporale è "implicita" nel parametro $\sigma^2 = 2Dt$.

La soluzione è la funzione errore:

$$C(x,t) = \frac{C_0}{2}\left[erf\left(\frac{\frac{b}{2}+x}{\sigma\sqrt{2}}\right) + erf\left(\frac{\frac{b}{2}-x}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$erf(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$



4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.4 Emissione continua in atmosfera

Abbiamo determinato la soluzione dell'equazione di diffusione per una sorgente istantanea localizzata in $x = 0$ al tempo $t = 0$

$$C(x,t) = \frac{Q}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Per analogia, la soluzione può essere generalizzata a n dimensioni cartesiane:

$$\frac{Q}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^n} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

dove r è la distanza dalla sorgente e $\sigma^2 = 2Dt$.

Per $\boldsymbol{n = 1}$ (sorgente puntiforme istantanea in una dimensione), si ha $r = x$ e si ritrova la soluzione precedente: questo corrisponde a un problema unidimensionale.

Per $\boldsymbol{n = 2}$ (sorgente lineare istantanea), si ha $r^2 = x^2 + y^2$e $\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$.

Per $\boldsymbol{n}$ **= 3** (sorgente tridimensionale istantanea), $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e $\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$.

Consideriamo una **sorgente tridimensionale** posta nell'origine di un sistema cartesiano che, a partire da $t = 0$, emette continuamente con una **portata** $q[\text{kg s}^{-1}]$.

In un intervallo di tempo dt, la sorgente emette una massa pari a qdt.

La concentrazione $C(\vec{r}, t)$ in un punto $\vec{r}$ al tempo t può essere ottenuta integrando nel tempo la soluzione per una sorgente istantanea tridimensionale ($n = 3$).

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.4 Emissione continua in atmosfera

Questo equivale a rappresentare l'emissione continua come una successione di "**sbuffi**" infinitesimi, ciascuno di intensità $q dt'$ rilasciati agli istanti t'e successivamente diffusi nello spazio.

Di conseguenza, la concentrazione al tempo t è la somma dei contributi di tutti gli sbuffi emessi agli istanti precedenti $t' < t$.

È importante esplicitare la dipendenza temporale della diffusione: il contributo di uno sbuffo emesso al tempo t' è descritto da una gaussiana con varianza

$$\frac{Q}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^3} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

$$\sigma^2 = 2D(t - t')$$

che tiene conto del tempo trascorso dalla sua emissione.

Il risultato è una convoluzione:

$$C(r^2, t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4D(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

Per risolvere questo integrale, introduciamo la variabile: $\beta^2 = \dfrac{r^2}{4D(t-t')}$

Adattiamo gli estremi di integrazione alla nuova variabile di integrazione β

$$\int_0^t \quad \Rightarrow \quad \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}$$

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.4 Emissione continua in atmosfera

$$C(x,t) = \frac{C_0}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4D(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

$$\beta^2 = \frac{r^2}{4D(t-t')}$$

$$\int_0^t \Rightarrow \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}$$

Calcoliamo l'infinitesimo $d\beta$:

$$2\beta d\beta = \frac{r^2}{4D} \frac{1}{(t-t')^2} dt'$$

da cui:

$$\frac{dt'}{(t-t')^2} = \frac{4D}{r^2} 2\beta d\beta$$

Sostituiamo il valore della variabile di integrazione β al secondo membro

$$\frac{dt'}{(t-t')^2} = \frac{4D}{r^2} 2 \frac{r}{2\sqrt{D}(t-t')^{1/2}} d\beta$$

ovvero:

$$\frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} = \frac{4\sqrt{D}}{r} d\beta$$

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.4 Emissione continua in atmosfera

$$C(x,t)=\frac{C_0}{8(\pi D)^{3/2}}\int_0^t e^{-\frac{r^2}{4D(t-t')}}\frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

$$\beta^2=\frac{r^2}{4D(t-t')}$$

$$\int_0^t \Rightarrow \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}$$

$$\frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}=\frac{4\sqrt{D}}{r}d\beta$$

Sostituendo:

$$C(r^2,t)=\frac{q}{8(\pi D)^{3/2}}\int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}e^{-\beta^2}\frac{4\sqrt{D}}{r}d\beta=\frac{q}{2(\pi)^{3/2}Dr}\int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}e^{-\beta^2}d\beta$$

Introduciamo la funzione degli errori complementare, così da riscrivere la soluzione come:

$$erfc(x)\coloneqq 1-\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-t^2}dt$$

$$C(r^2,t)=\frac{q}{2(\pi)^{3/2}Dr}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}e^{-\beta^2}d\beta=\frac{q}{4\pi Dr}erfc\left(\frac{r}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

La distribuzione spazio-temporale della concentrazione può essere analizzata più facilmente separando i contributi delle due variabili:

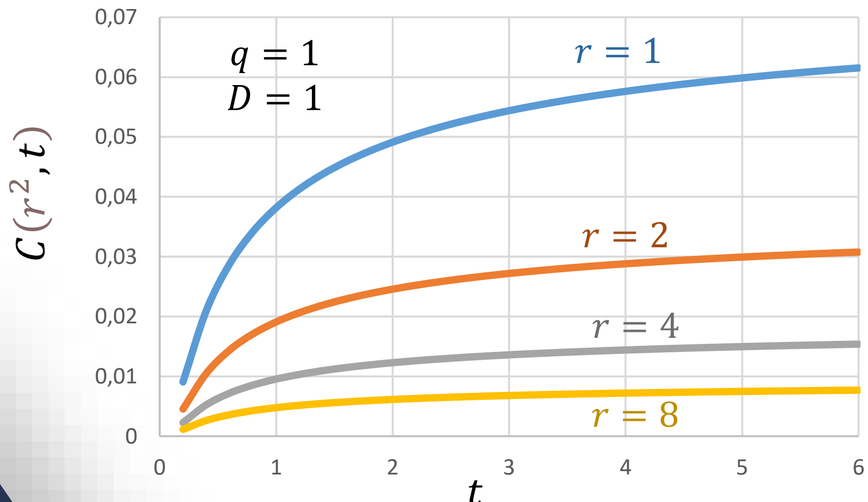
- fissiamo una distanza r dalla sorgente e studiamo l'**evoluzione temporale della concentrazione in quel punto**;
- fissiamo un istante di tempo e osserviamo la **distribuzione della concentrazione nello spazio al variare della distanza r**.

4.1 EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

4.1.4 Emissione continua in atmosfera

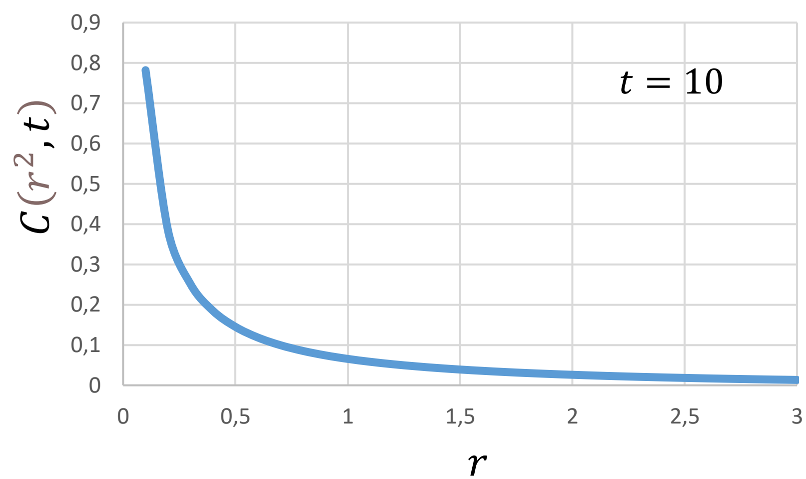
$$C(r^2,t) = \frac{q}{4\pi D r} erfc\left(\frac{r}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

Plottiamo $C(r^2,t)$ in funzione del tempo per diverse distanze r dalla sorgente.



Un'emissione continua porta, per $t \to \infty$, a una concentrazione che tende a un valore stazionario, dipendente dalla distanza dalla sorgente.

Plottiamo ora $C(r^2,t)$ in funzione di r, per un tempo sufficientemente grande.



La distribuzione spaziale della concentrazione in regime stazionario mostra una forte dipendenza dalla distanza dalla sorgente, con valori più elevati nelle regioni più vicine.

4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.1 Emissione puntiforme istantanea

Consideriamo una sorgente puntiforme di particelle **trasportate in un flusso a velocità uniforme $\vec{\mathbf{u}}$** .L'asse xè orientato nella direzione del flusso.

Per una sorgente puntiforme istantanea posta all'origine all'istante $t = 0$, introduciamo un sistema di coordinate x', y', z'solidale con il flusso.

La relazione con il sistema x, y, z di laboratorio è descritta dalle trasformazioni di Galileo:

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Nel sistema di coordinate x', y', z' la soluzione per un'emissione istantanea può essere scritta come:

$$\frac{Q}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^n} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

$$C(x', y', z', t) = \frac{Q}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^3} e^{-\frac{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)}{2\sigma^2}}$$

Applicando le trasformazioni di Galileo, si ottiene nel sistema di coordinate di laboratorio:

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^3} e^{-\frac{\left[(x-ut)^2 + y^2 + z^2\right]}{2\sigma^2}}$$

4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.2 Emissione puntiforme continua

Per determinare la concentrazione $C(x,y,z,t)$ nella posizione (x,y,z,t) al tempo t, generata da una sorgente puntiforme continua posta all'origine a partire dall'istante $t = 0$ in un flusso uniforme $\vec{u}$, si segue lo stesso procedimento utilizzato per passare da una sorgente istantanea a una sorgente continua nel caso in assenza di vento.

Consideriamo un **singolo sbuffo istantaneo infinitesimo** emesso all'istante $t' < t$, che rilascia in atmosfera una quantità di particelle ospiti qdt' [kg].

Introduciamo un sistema di coordinate solidale con il flusso: il sistema si muove con il fluido e, per ciascuno sbuffo, inizia a muoversi all'istante t'.

Riprendiamo quindi la soluzione per una sorgente continua in assenza di vento:

$$C(x,t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t e^{-\frac{r'^2}{4D(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

con: $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

Le particelle si muovono con il flusso e diffondono in un intervallo di tempo $t - t'$.

Per esprimere la soluzione nel sistema di coordinate fisso (di laboratorio), relativo allo sbuffo emesso all'istante t', le trasformazioni di Galileo assumono la forma:

$$\begin{cases} x' = x - u(t-t') \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.2 Emissione puntiforme continua

$$C(x,t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t e^{-\frac{r'^2}{4D(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

$$\begin{cases} x' = x - u(t-t') \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Si ottiene quindi:

$$C(x,y,z,t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t e^{-\frac{\left[\left(x-u(t-t')\right)^2 + y^2 + z^2\right]}{4D(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

Riconduciamoci al caso visto per un'emissione continua in assenza di vento.
Partiamo con lo sviluppare il quadrato all'esponente

$$C(x,y,z,t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t e^{-\frac{\left[x^2 - 2ux(t-t') + u^2(t-t')^2 + y^2 + z^2\right]}{4D(t-t')}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

e separiamo l'esponente in tre contributi:

$$C(x,y,z,t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} \int_0^t e^{-\frac{\left[x^2+y^2+z^2\right]}{4D(t-t')}} e^{\frac{2ux}{4D}} e^{-\frac{u^2(t-t')}{4D}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

da cui

$$C(x,y,z,t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} e^{\frac{2ux}{4D}} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4D(t-t')}} e^{-\frac{u^2(t-t')}{4D}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.2 Emissione puntiforme continua

$$C(x,y,z,t) = \frac{q}{8(\pi D)^{3/2}} e^{\frac{2ux}{4D}} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4D(t-t')}} e^{-\frac{u^2(t-t')}{4D}} \frac{dt'}{(t-t')^{3/2}}$$

Introduciamo di nuovo la variabile $\beta^2 = \frac{r^2}{4D(t-t')}$ e, seguendo gli stessi passaggi già illustrati per il caso in assenza di vento, possiamo ricondurci ai risultati precedentemente ottenuti:

$$C(x,y,z,t) = \frac{q}{2(\pi)^{3/2} Dr} e^{\frac{ux}{2D}} \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-\beta^2} e^{-\frac{u^2 r^2}{16 D^2 \beta^2}} d\beta$$

$$\frac{dt'}{(t-t')^{3/2}} = \frac{4\sqrt{D}}{r} d\beta$$

$$\int_0^t \Rightarrow \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty}$$

Introduciamo il parametro: $a^2 = \frac{u^2 r^2}{16 D^2}$

$$C(x,y,z,t) = \frac{q}{2(\pi)^{3/2} Dr} e^{\frac{ux}{2D}} \int_{\frac{r}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-\left(\beta^2 + \frac{a^2}{\beta^2}\right)} d\beta$$

$$\beta^2 = \frac{r^2}{4D(t-t')}$$

Imponendo il limite $t \to \infty$, cioè considerando il **caso stazionario**, l'estremo inferiore dell'integrazione tende a zero.

$$C(x,y,z,t) = \frac{q}{2(\pi)^{3/2} Dr} e^{\frac{ux}{2D}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\beta^2 + \frac{a^2}{\beta^2}\right)} d\beta$$

4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.2 Emissione puntiforme continua

$$C(x,y,z,t) = \frac{q}{2(\pi)^{3/2}Dr} e^{\frac{ux}{2D}} \int_0^\infty e^{-\left(\beta^2+\frac{a^2}{\beta^2}\right)} d\beta$$

$$a^2 = \frac{u^2 r^2}{16D^2}$$

Si può dimostrare che:

$$\int_0^\infty e^{-\left(\beta^2+\frac{a^2}{\beta^2}\right)} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$$

Sostituendo:

$$C(x,y,z,t) = \frac{q}{2(\pi)^{3/2}Dr} e^{\frac{ux}{2D}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\left(\beta^2+\frac{a^2}{\beta^2}\right)} d\beta = \frac{q}{4\pi Dr} e^{-\frac{u(r-x)}{2D}}$$

Visualizziamo la soluzione nel piano xy, rappresentando le linee a concentrazione costante. Per comodità di visualizzazione, introduciamo le variabili adimensionali:

$$\bar{x} = \frac{ux}{D} \qquad \bar{y} = \frac{uy}{D} \qquad \bar{r}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$$

in modo da poter riscrivere la soluzione come:

$$C(x,y,z,t) = \frac{qu}{4\pi\bar{r}D^2} e^{-\frac{(\bar{r}-\bar{x})}{2}}$$

DISPERSIONE DI INQUINANTI IN ATMOSFERA

4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.2 Emissione puntiforme continua

$$C(x,y,z,t) = \frac{qu}{4\pi\bar{r}D^2} e^{-\frac{(\bar{r}-\bar{x})}{2}}$$

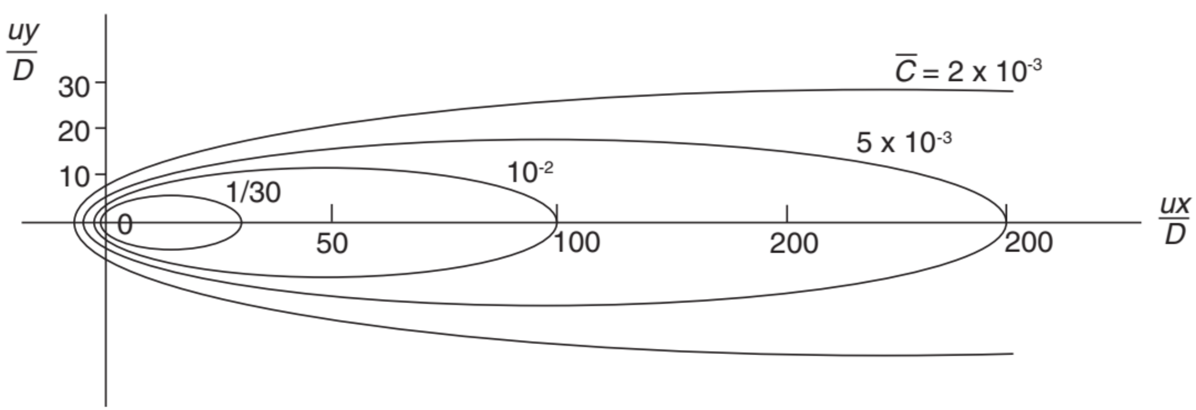
che può essere ulteriormente semplificata introducendo $\bar{C}(x,y,z,t) = \dfrac{4\pi D^2 C}{qu}$

e quindi:

$$\bar{C}(x,y,z,t) = \frac{1}{\bar{r}} e^{-\frac{(\bar{r}-\bar{x})}{2}}$$

Questa relazione non contiene più parametri dimensionali come D, q e u.

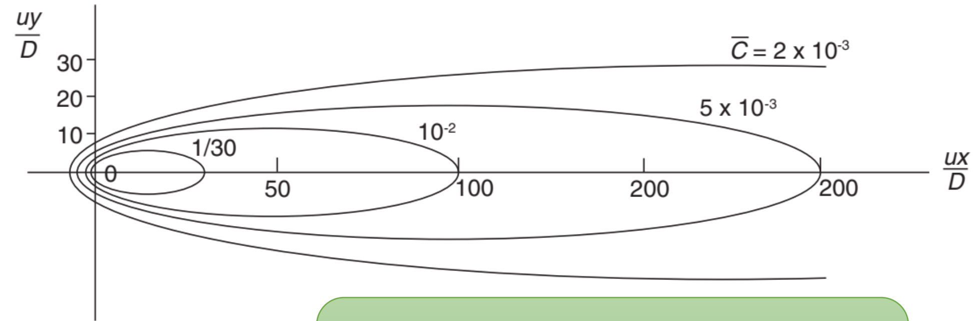
La figura mostra il grafico della soluzione dell'equazione di **avvezione-diffusione** per valori costanti di $\bar{C}$, relativa a una sorgente puntiforme continua in un flusso uniforme nel limite $t \to \infty$.



4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.2 Emissione puntiforme continua

L'**avvezione delle particelle trasportate dal fluido** lungo la direzione $\bar{x}$ domina il processo diffusivo.



Questo comportamento risulta ancora più evidente per **grandi valori di x**.

$$C(x,y,z,t) = \frac{q}{4\pi D r} e^{-\frac{u(r-x)}{2D}}$$

Utilizzando l'approssimazione:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = x\sqrt{1+\frac{y^2+z^2}{x^2}} \approx x\left(1+\frac{y^2+z^2}{2x^2}\right) = x + \frac{y^2+z^2}{2x}$$

e sostituendola nella soluzione inziale $C(x,y,z,t)$, ossia nella forma precedente all'introduzione delle variabili adimensionali, e considerando il limite $t \rightarrow \infty$:

$$C(x,y,z,t) = \frac{q}{4\pi r D} e^{-\frac{u(r-x)}{2D}} \approx \frac{q}{4\pi r D} e^{-\frac{u(y^2+z^2)}{4xD}} = \frac{q}{2\pi r \sigma^2} e^{-\frac{u(y^2+z^2)}{2\sigma^2}}$$

dove si è posto $\sigma^2 = \frac{2Dx}{u}$

4.2 DIFFUSIONE IN PRESENZA DI VENTO UNIFORME

4.2.2 Emissione puntiforme continua

$$C(x,y,z,t) = \frac{q}{2\pi r\sigma^2} e^{-\frac{u(y^2+z^2)}{2\sigma^2}}$$

$$\sigma^2 = \frac{2Dx}{u}$$

Nel denominatore abbiamo r. Per grandi x, possiamo approssimare $r \approx x$.

Quindi, riutilizzando nuovamente l'espressione introdotta per σ^2, si ottiene:

$$C(x,y,z,t) = \frac{q}{2\pi u\sigma^2} e^{-\frac{u(y^2+z^2)}{2\sigma^2}}$$

Questa funzione descrive la **dispersione nel piano perpendicolare al flusso** (direzioni y e z). La varianza σ^2 cresce con la distanza x, poiché è proporzionale al tempo di permanenza delle particelle nel flusso, dato da $t = \frac{x}{u}$, cioè il tempo necessario per essere trasportate dalla sorgente fino alla posizione x.

Ne consegue che, per grandi valori di x, la diffusione lungo la direzione del flusso diventa trascurabile rispetto al trasporto avvettivo: la nube viene principalmente **trasportata dal flusso del vento**, mentre la **diffusione** agisce soprattutto nelle **direzioni trasversali**.

Il fatto che non esiste dipendenza dal tempo deriva dall'imposizione del limite $t \to \infty$, che descrive una situazione stazionaria.