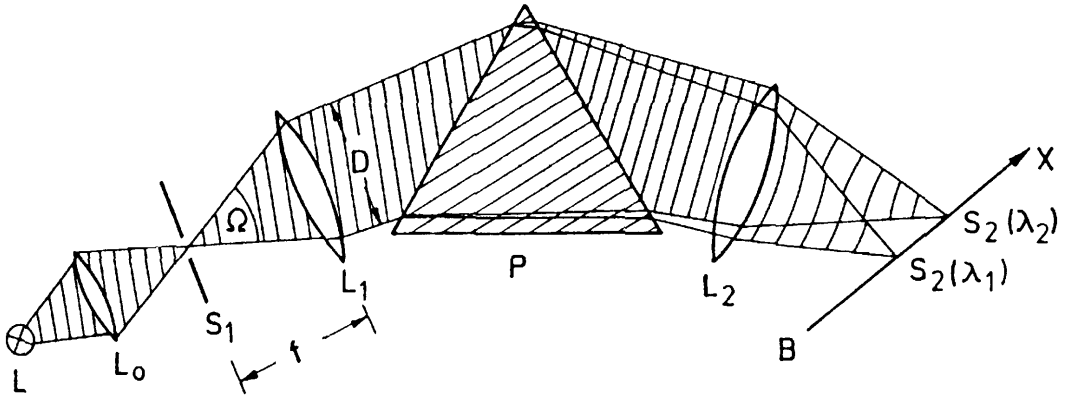
CAPITOLO 4

STRUMENTAZIONE SPETTROSCOPICA

4.1 SPETTROGRAFI E MONOCROMATORI

Gli spettrografi sono strumenti ottici che formano un'immagine $S_2(\lambda)$ di un'apertura (*slit*) di ingresso S_1; le immagini sono separate lateralmente per diverse lunghezze d'onda λ della luce incidente. La dispersione laterale è dovuta o alla dispersione spettrale in un prisma o alla diffrazione causata da un reticolo piano o concavo.

Spettrografo a prisma



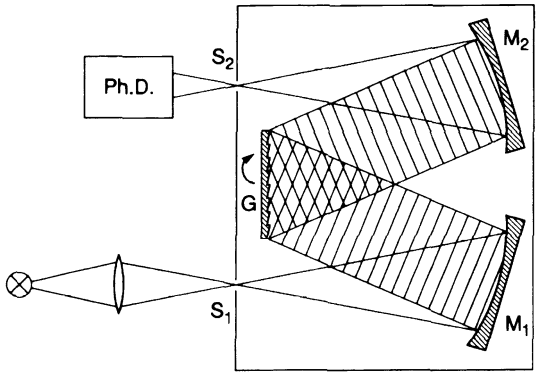
Una sorgente di luce L illumina una *slit* d'ingresso S_1, che è posizionata nel piano focale di una lente collimatrice L_1. Dietro L_1 il fascio collimato passa attraverso un prisma P, che è diffrato di un angolo $\theta(\lambda)$ che dipende dalla lunghezza d'onda λ della luce incidente. La lente L_2 forma un'immagine $S_2(\lambda)$ della slit d'ingresso S_1.

La posizione $x(\lambda)$ dell'immagine nel piano focale di L_2 sarà funzione della lunghezza d'onda λ. La dispersione lineare $dx/d\lambda$ dello spettrografo dipende dalla dispersione spettrale $dn/d\lambda$ del materiale del prisma e dalla lunghezza focale di L_2.

4.1 SPETTROGRAFI E MONOCROMATORI

Quando un reticolo di diffrazione è utilizzato per separare le linee spettrali $S_2(\lambda)$, le due lenti L_1 e L_2 sono rimpiazzate da due specchi sferici M_1 e M_2, che creano un'immagine della slit d'ingresso sul piano di osservazione.

Spettrografo a reticolo



Entrambi i sistemi possono usare o sistemi fotografici o sistemi fotoelettrici per acquisire l'immagine della slit d'ingresso. A seconda del tipo di rivelazione utilizzata, si distingue tra **spettrografo** e **monocromatore**.

In uno **spettrografo**, una matrice di diodi ad accoppiamento di carica (dall'inglese **Charge-Coupled Device, CCD**) viene posizionato nel piano focale di L_2 o M_2. L'intero intervallo spettrale $\Delta\lambda = \lambda_1(x_1) - \lambda_2(x_2)$ coperto dalla dispersione laterale $\Delta x = x_1 - x_2$ di una matrice di diodi può essere acquisita simultaneamente. L'intervallo spettrale è limitato dalla sensibilità spettrale del materiale di cui è composto il CCD.

4.1 SPETTROGRAFI E MONOCROMATORI

I **monocromatori**, d'altro canto, si basano su acquisizione fotoelettrica di una regione spettrale molto stretta.

La slit di uscita S_2 seleziona un intervallo Δx_2 nel piano focale B consentendo solo ad una limitata porzione spettrale $\Delta\lambda$ di raggiungere il rivelatore fotoelettrico.

Diversi intervalli spettrali sono acquisiti muovendo S_2 lungo la direzione laterale x.

Una soluzione alternativa consiste nel muovere il prisma o il reticolo che consente a diverse regioni spettrali di accordarsi lungo la slit di uscita S_2 che in questo caso viene mantenuta fissa.

Rispetto allo spettrografo, diverse regioni spettrali non vengono acquisite simultaneamente, ma in successione.
Il segnale acquisito dal rivelatore è proporzionale al prodotto dell'area $h\Delta x_2$ della *slit* di uscita (h è l'altezza della slit) con intensità spettrale $\int I(\lambda)d\lambda$, dove l'integrale si intende esteso sull'intervallo spettrale disperso all'interno della larghezza Δx_2 di S_2.

In letteratura, il termine **spettrometro** è spesso utilizzato per indicare entrambi gli strumenti.

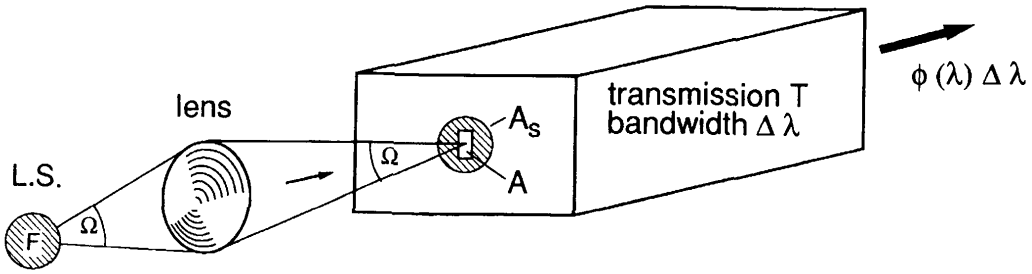
La scelta di uno spettrometro rispetto ad un altro per un determinato esperimento è legato alle caratteristiche di base degli spettrometri e alla loro rilevanza per la particolare applicazione.

4.1 SPETTROGRAFI E MONOCROMATORI

4.1.1 Velocità di uno spettrometro

Quando l'intensità spettrale I_λ^* all'interno di un angolo solido $d\Omega = 1\ sr$ incide su una slit d'ingresso di area A, uno spettrometro con angolo di accettanza Ω trasmette un flusso radiante all'interno dell'intervallo spettrale $d\lambda$ pari a:

$$\phi_\lambda d\lambda = I_\lambda^* \frac{A}{A_s} T(\lambda) \Omega d\lambda$$



dove $A_s \geq A$ è l'area dell'immagine della sorgente alla slit di ingresso e $T(\lambda)$ è la trasmissione spettrale dello spettrometro.

Il prodotto $U = A\Omega$ è chiamato **étendue**. Per uno spettrografo a prisma, il massimo anglo solido di accettanza è limitato dall'area del prisma; per uno spettrografo a reticolo, le dimensioni del reticolo e degli specchi limitano l'angolo solido di accettanza Ω.

4.1 SPETTROGRAFI E MONOCROMATORI

4.1.1 Velocità di uno spettrometro

Per massimizzare la velocità di uno spettrometro, è vantaggioso proiettare la luce della sorgente nella slit d'ingresso in modo che l'angolo di accettanza Ω sia completamente utilizzato.

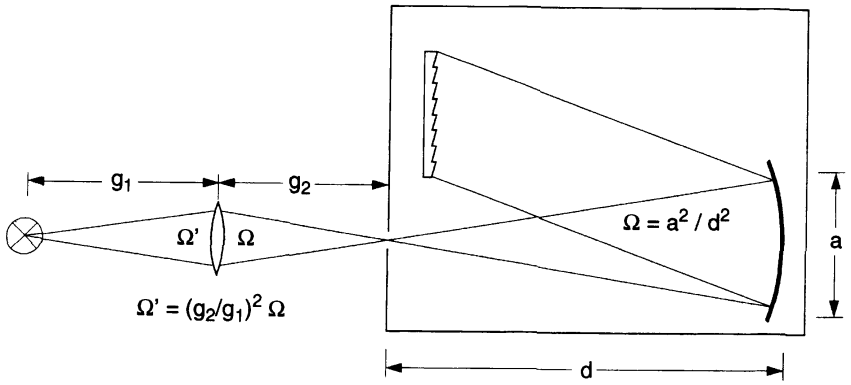


Immagine ottimizzata di una sorgente di luce alla slit di ingresso di uno spettrometro: l'angolo solido Ω' coincide con l'angolo di accettanza $\Omega = \left(\frac{a}{d}\right)^2$ dello spettrometro

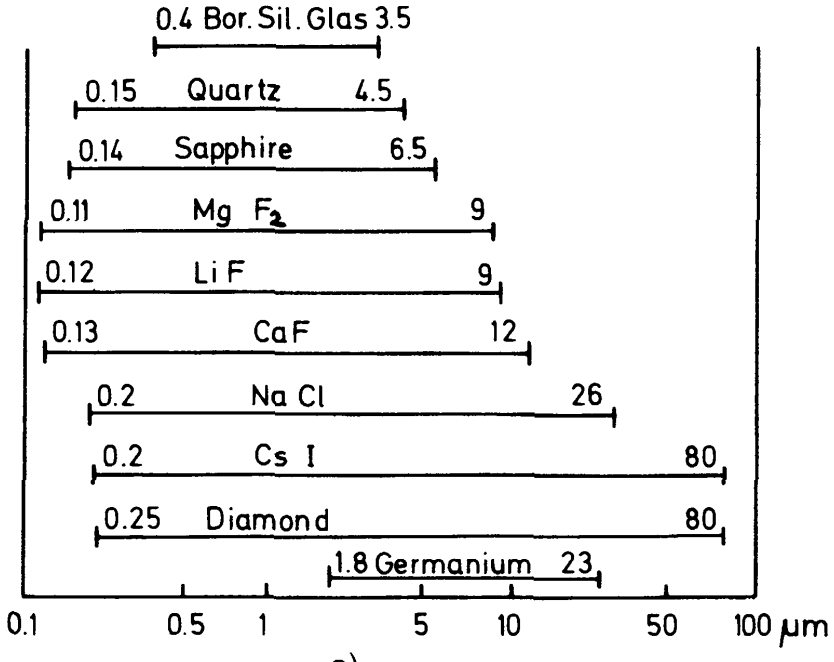
Una lente convergente può aumentare la potenza radiante che attraversa la fenditura d'ingresso dello spettrometro, formando su di essa un'immagine ridotta della sorgente estesa. Alla riduzione delle dimensioni dell'immagine corrisponde, tuttavia, un aumento della divergenza del fascio: la radiazione che si propaga al di fuori dell'angolo solido di accettanza Ω dello spettrometro non contribuisce al segnale rilevato.

4.1 SPETTROGRAFI E MONOCROMATORI

4.1.2 Trasmissione spettrale

Per uno spettrometro a prisma, la **trasmissione spettrale** dipende dal materiale del prisma e delle lenti.

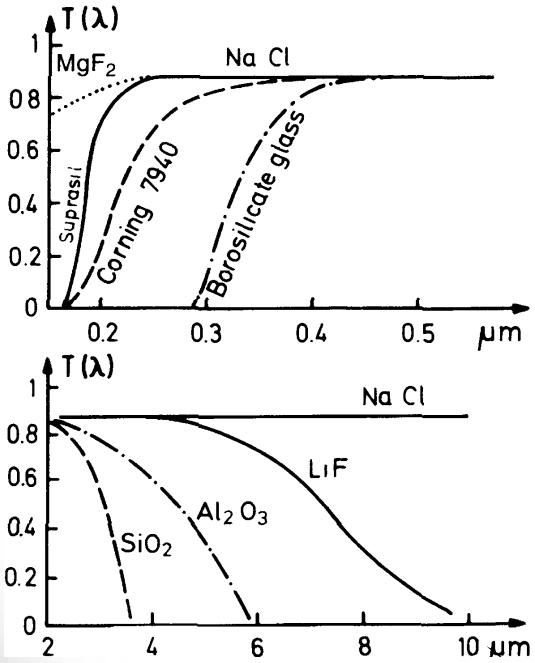
Usando quarzo fuso, l'intervallo spettrale accessibile si estenda da 180 nm fino a 3000 nm. Al di sotto di 180 nm (regione dell'ultravioletto), Fluoruro di litio e Fluoruro di calcio vengono usati come materiali per le lenti e per il prisma, anche se molti spettrometri nell'UV utilizzano reticolo in riflessione e specchi.



a)

4.1 SPETTROGRAFI E MONOCROMATORI

4.1.2 Trasmissione spettrale



Nella regione dell'infrarosso, diversi materiali (CaF_2, NaCl, KBr…) sono trasparenti fino a 30 µm.

Grazie all'alta riflettività degli specchi degli spettrometri ricoperti da strato metallico nella regione dell'infrarosso, gli spettrometri con specchi sono tipicamente preferiti rispetto agli spettrometri a prisma.

Molte transizioni roto-vibrazionali di molecole presenti in aria, quali H_2O e CO_2, cadono nell'intervallo 3-10 µm, generando un assorbimento selettivo in lunghezza d'onda della radiazione trasmessa.

Spettrometri operanti nell'infrarosso richiedono quindi o il vuoto all'interno, oppure una leggera sovrappressione di azoto secco.

4.1 SPETTROGRAFI E MONOCROMATORI

4.1.3 Potere risolvente spettrale

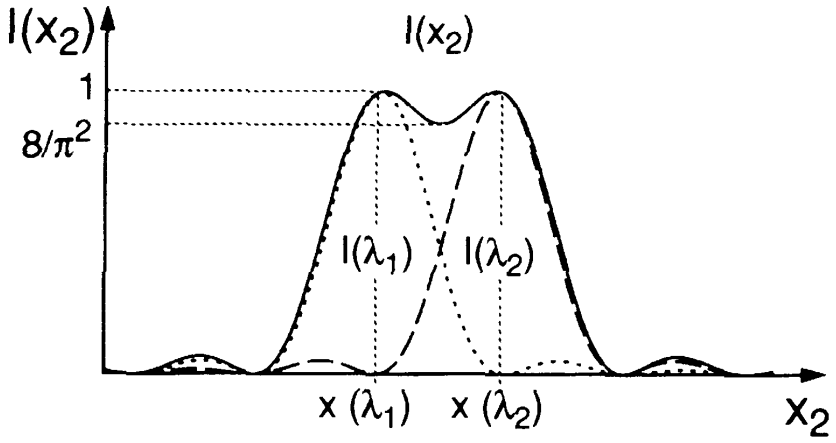
Il **potere risolvente** spettrale di un generico elemento disperdente è definito come:

$$R = \left|\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right| = \left|\frac{\upsilon}{\Delta\upsilon}\right|$$

dove $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ rappresenta la separazione minima tra le lunghezze d'onda centrali λ_1 e λ_2 di due linee ravvicinate che possono essere considerate come risolte.

Cosa si intende per risolte?

La distribuzione d'intensità composta da due linee con profili di intensità $I_1(\lambda - \lambda_1)$ e $I_2(\lambda - \lambda_2)$ sono riconoscibili se è possibile riconoscere una zona di minimo dell'intensità totale $I(\lambda) = I_1(\lambda - \lambda_1) + I_2(\lambda - \lambda_2)$ tra i due massimi.



4.1 SPETTROGRAFI E MONOCROMATORI

4.1.3 Potere risolvente spettrale

La distribuzione d'intensità $I(\lambda)$ dipende sia dal rapporto I_1/I_2 che dai profili di entrambe le componenti. Quindi, il minimo intervallo risolvibile $\Delta\lambda$ è diverso per profili differenti.

Rayleigh introdusse un criterio di risoluzione di profili di riga limitati da diffrazione.

Due righe sono considerate risolte se il massimo centrale di diffrazione del profilo $I_1(\lambda - \lambda_1)$ coincide con il primo minimo di $I_2(\lambda - \lambda_2)$.

Calcoliamo il potere risolvente spettrale di uno spettrometro.

Quando attraversa un elemento disperdente (prisma o reticolo), un fascio parallelo composto da due componenti cromatiche λ e $\lambda + \Delta\lambda$ è diviso in due fasci con deviazione angolare θ e $\theta + \Delta\theta$ rispetto alla direzione iniziale.

La separazione angolare sarà:

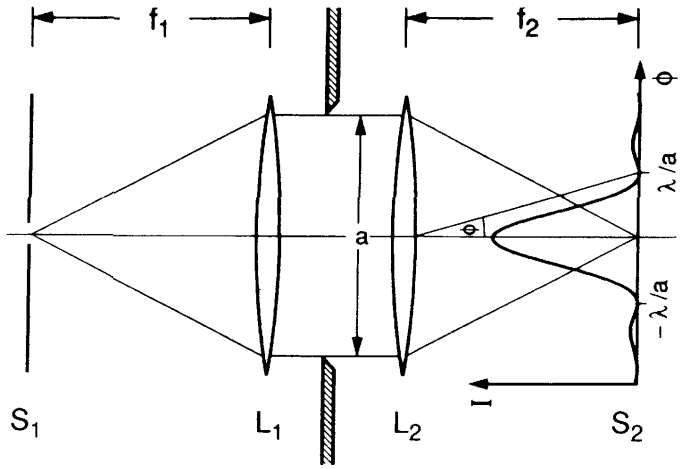
$$\Delta\theta = \frac{d\theta}{d\lambda}\Delta\lambda$$

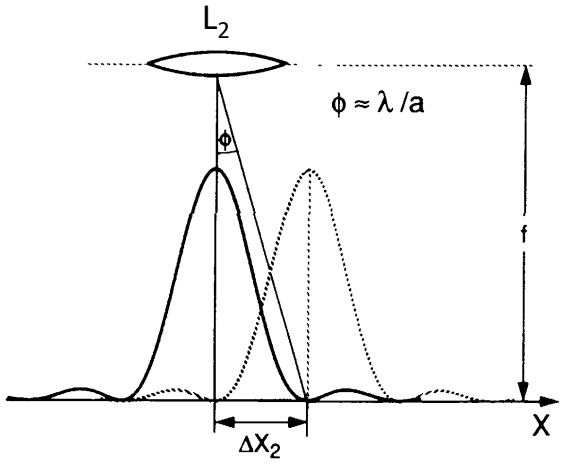
dove $\frac{d\theta}{d\lambda}$ è detta dispersione angolare [rad/nm].

4.1 SPETTROGRAFI E MONOCROMATORI

4.1.3 Potere risolvente spettrale

Schematizziamo l'apparato come in Figura a sinistra, omettendo per semplificazione l'elemento disperdente tra le lenti L_1 e L_2:





La lente all'uscita con lunghezza focale f_2 crea un'immagine della slit d'ingresso S_1 sul piano B.

Considerando la Figura a destra, la distanza Δx_2 tra le due i massimi delle due immagini $S_2(\lambda)$ e $S_2(\lambda + \Delta\lambda)$ è data da:

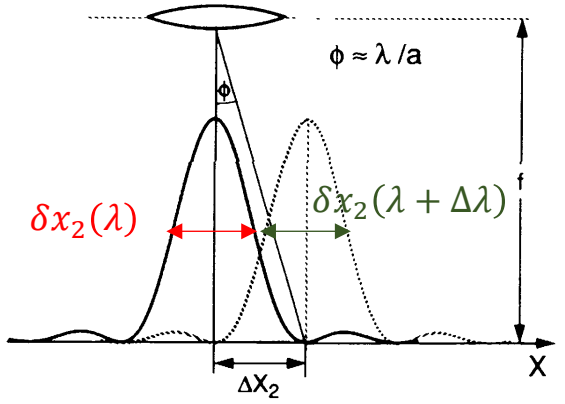
$$\Delta x_2 = f_2 \Delta\theta = f_2 \frac{d\theta}{d\lambda} \Delta\lambda = \frac{dx}{d\lambda} \Delta\lambda$$

$\frac{dx}{d\lambda}$ è chiamata dispersione lineare dello strumento [mm/nm].

4.1 SPETTROGRAFI E MONOCROMATORI

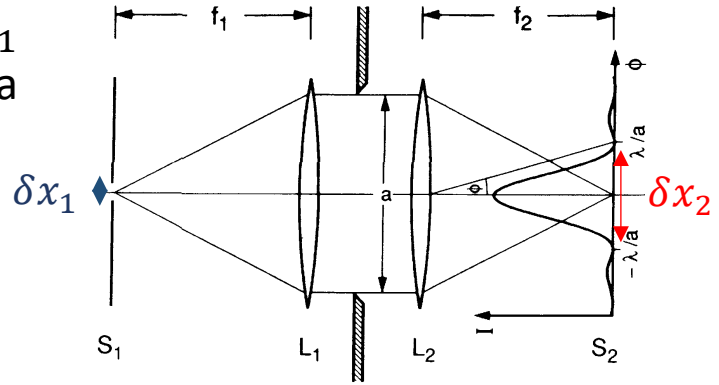
4.1.3 Potere risolvente spettrale

Per poter risolvere due linee a λ e $\lambda + \Delta\lambda$, la separazione Δx_2 deve essere almeno pari alla somma $\frac{\delta x_2(\lambda)+\delta x_2(\lambda+\Delta\lambda)}{2}$ delle larghezze delle due immagini delle slit.



Poiché la larghezza δx_2 è legata alla larghezza δx_1 della slit d'ingresso secondo l'ottica geometrica dalla relazione:

$$\delta x_2 = \frac{f_2}{f_1}\delta x_1$$



il potere risolvente $\lambda/\Delta\lambda$ può essere aumentato diminuendo δx_1.

Il limite ultimo teorico è dettato dalla diffrazione.

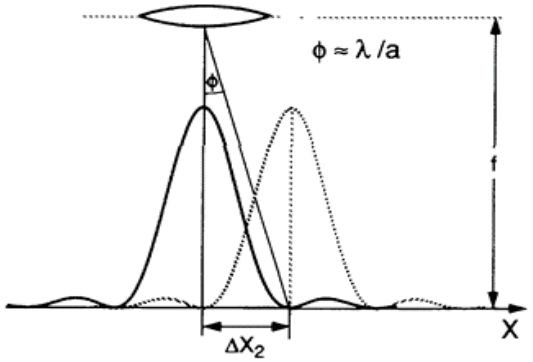
Quando un fascio di luce parallelo passa attraverso un'apertura a, una figura di diffrazione viene prodotto nel piano focale della lente L_2.

4.1 SPETTROGRAFI E MONOCROMATORI

4.1.3 Potere risolvente spettrale

La distribuzione d'intensità $I(\phi)$ in funzione dell'angolo ϕ con l'asse ottico del sistema è dato da:

$$I(\phi) = I_0 \left[\frac{sen\left(\frac{a\pi sen\phi}{\lambda}\right)}{\left(\frac{a\pi sen\phi}{\lambda}\right)} \right]^2 \simeq I_0 \left[\frac{sen\left(\frac{a\pi\phi}{\lambda}\right)}{\left(\frac{a\pi\phi}{\lambda}\right)} \right]^2$$



I primi due minimi di diffrazione a $\phi = \pm\frac{\lambda}{a} \ll \pi$ sono simmetrici rispetto al massimo centrale (ordine zero di diffrazione) a $\phi = 0$. Il massimo centrale contiene circa il 90% dell'intensità totale.

Quindi, anche considerando una slit d'ingresso infinitesimamente piccola, verrà prodotta un'immagine di larghezza pari a:

$$\delta x_2{}^{diffr} = f_2 \frac{\lambda}{a}$$

$\Delta x_2 = f_2 \Delta\theta$

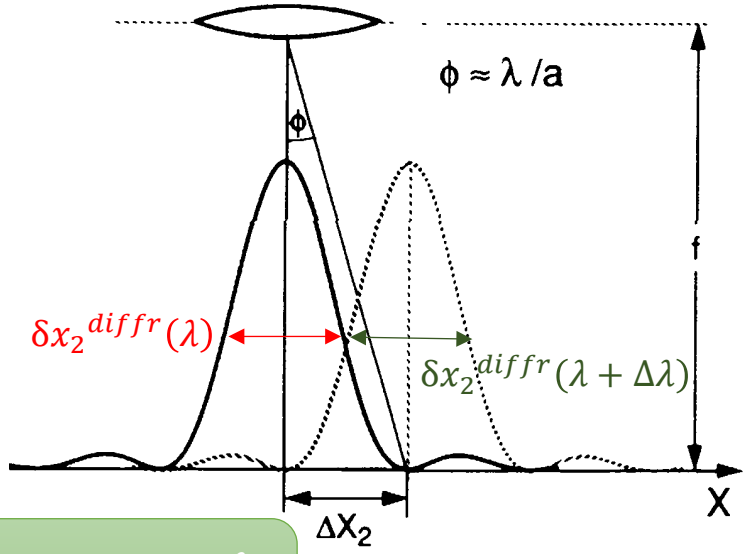
definita come la distanza tra il massimo centrale di diffrazione e il primo minimo, che è approssimativamente uguale alla FWHM del massimo centrale.

4.1 SPETTROGRAFI E MONOCROMATORI

4.1.3 Potere risolvente spettrale

In base al criterio Rayleigh, due linee spettrali equamente intense con lunghezze d'onda λ e $\lambda + \Delta\lambda$ sono risolte se il massimo centrale di diffrazione di $S_2(\lambda)$ coincide con il primo minimo di $S_2(\lambda + \Delta\lambda)$.

Questo vuol dire che i loro massimi devono essere separati di $\delta x_2{}^{diffr} = \Delta x_2 = f_2 \frac{\lambda}{a}$.



$$\Delta x_2 \geq \frac{\delta x_2{}^{diffr}(\lambda) + \delta x_2{}^{diffr}(\lambda + \Delta\lambda)}{2} \approx \delta x_2{}^{diffr}$$

$$\delta x_2{}^{diffr} = f_2 \frac{\lambda}{a}$$

Combinando questa espressione con $\Delta x_2 = f_2 \frac{d\theta}{d\lambda} \Delta\lambda$, si determina il limite fondamentale per il potere risolvente:

$$\left| \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \right| \leq a \frac{d\theta}{d\lambda}$$

che chiaramente dipende solo dalla dimensione a dell'apertura e dalla dispersione angolare dello strumento.

Si può dimostrare che un'espressione analoga è valida anche in caso di slit di dimensioni finite.

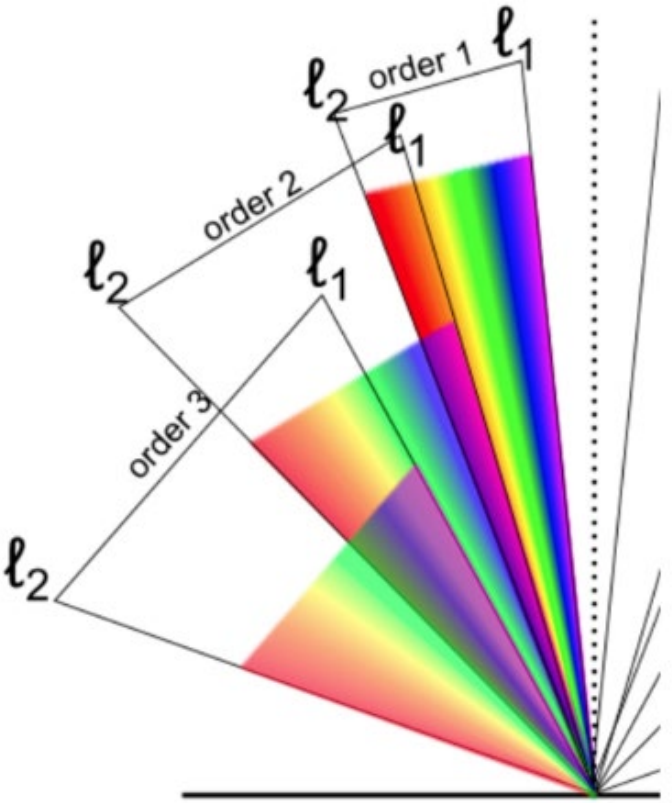
4.1 SPETTROGRAFI E MONOCROMATORI

4.1.4 Free Spectral Range

Il Free Spectral Range di uno spettrometro è l'intervallo in lunghezza d'onda $\delta\lambda$ della radiazione incidente per il quale esiste una relazione "ad un valore" tra λ e la posizione $x(\lambda)$ dell'immagine della slit d'ingresso.

Per uno spettrometro a prisma il free spectral range copre l'intera regione spettrale della dispersione normale del materiale del prisma.

Per gli spettrometri a reticolo, $\delta\lambda$ è determinato dell'ordine di diffrazione m. La Figura rappresenta schematicamente la diffrazione di un reticolo relativa ad una radiazione incidente policromatica compresa tra λ_1 e λ_2.



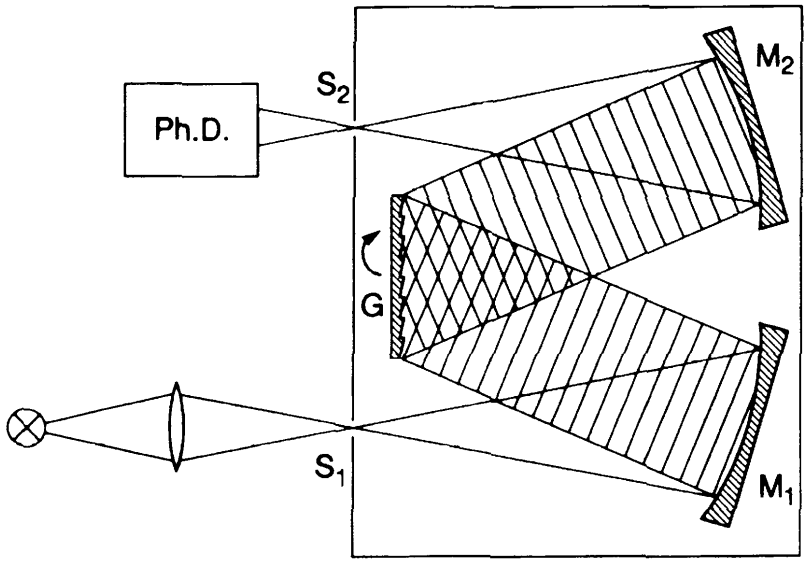
Se si considera la radiazione diffratta al secondo ordine, le sovrapposizioni con lo spettro al primo ordine e quello al terzo ordine rendono quelle zone spettrali ambigue per misurare correttamente la lunghezza d'onda.

4.2 SPETTROMETRO A RETICOLO

In uno spettrometro a reticolo, la lente collimatrice L_1 è rimpiazzata da uno specchio sferico M_1 con la slit d'ingresso S_1 nel piano focale di M_1.

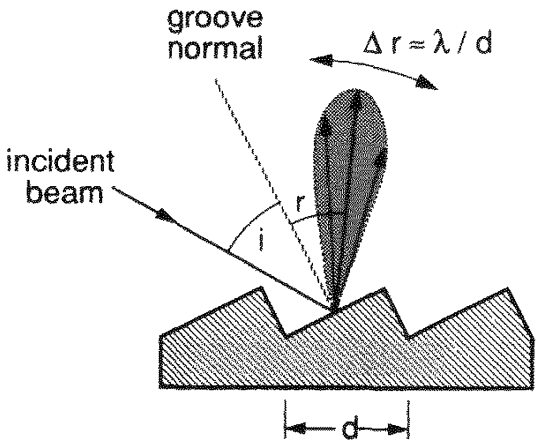
Il fascio collimato è riflesso da M_1 su un reticolo costituito da un numero elevato di solchi (circa 10^5) parallele alla slit d'ingresso. I solchi (grooves) sono stati ricavati su un substrato di vetro liscio o prodotte mediante tecniche fotolitografiche.

L'intera superficie del reticolo è rivestita con uno strato altamente riflettente (metallico o film dielettrico). La luce riflessa dal reticolo è focalizzata da uno specchio sferico M_2 verso la slit di uscita S_2 o una lastra fotografica nel piano focale di M_2.



4.2 SPETTROMETRO A RETICOLO

I solchi, illuminati coerentemente, possono essere visti come piccole sorgenti di radiazione, ognuno dei quali diffrange la luce incidente su un piccolo solco con larghezza $d \approx \lambda$ in un ampio intervallo angolare $\Delta r \approx \frac{\lambda}{d}$ lungo la direzione della riflessione geometrica.



La luce totale riflessa consiste di una sovrapposizione coerente di questi numerosi contributi parziali. Solo nelle direzioni dove tutte le onde parziali emesse dai diversi solchi sono in fase interferiranno costruttivamente e daranno luogo ad un'intensità totale alta, mentre in tutte le altre direzioni i diversi contributi si cancelleranno per interferenza distruttiva.

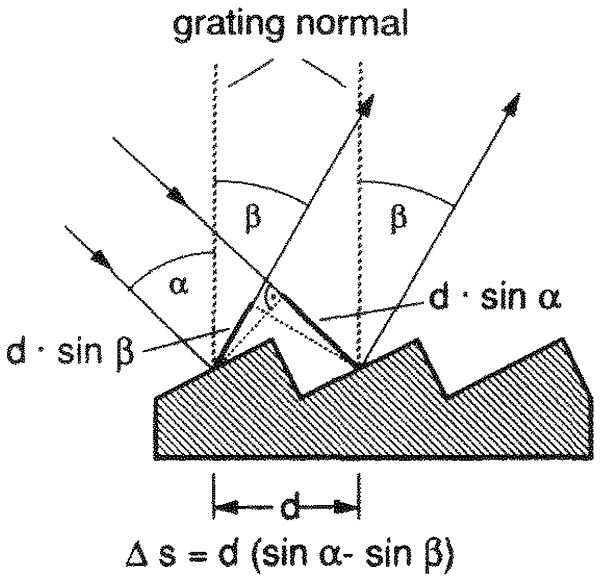
4.2 SPETTROMETRO A RETICOLO

Consideriamo un fascio luminoso incidente su due solchi adiacenti.

Ad un angolo di incidenza α rispetto alla normale del reticolo (che non coincide con la normale rispetto al solco), si avrà interferenza costruttiva per quelle direzioni β per cui la differenza di cammino ottico $\Delta s = \Delta s_1 - \Delta s_2$ è un multiplo intero m della lunghezza d'onda λ.

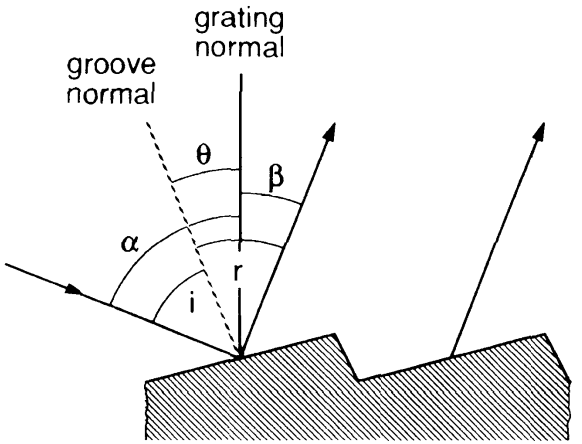
Questo porta all'equazione del reticolo:

$$d(sen\alpha \pm sen\beta) = m\lambda$$



Oltre alla normale del reticolo, possiamo definire l'asse normale del solco.

Definiamo angolo di blaze θ del reticolo l'angolo tra la normale del solco e la normale del reticolo, come rappresentato in Figura.



4.2 SPETTROMETRO A RETICOLO

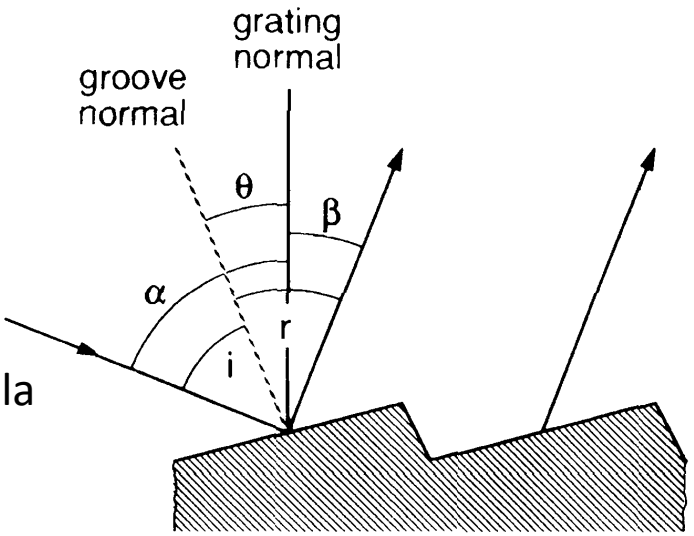
Nel caso in cui, come in Figura, α e β sono ai lati opposti della normale del reticolo, è facile verificare le seguenti relazioni tra gli angoli

$$i = \alpha - \theta$$

$$r = \theta + \beta$$

che portano per una riflessione speculare $i = r$ alla condizione per l'angolo di blaze θ:

$$\theta = \frac{\alpha - \beta}{2}$$



L'angolo di incidenza α dipende dalla particolare costruzione dello spettrometro, mentre l'angolo β per il quale si ha interferenza costruttiva dipende da λ.

Quindi, l'angolo di blaze θ deve essere specificato per il desiderato intervallo spettrale e dal tipo di spettrometro.

Nelle applicazioni di spettroscopia laser, spesso si adotta la situazione in cui $\alpha = \beta$, che vuol dire che la luce è riflessa indietro nella direzione della luce incidente.

Tale configurazione è nota come **reticolo di Littrow**.

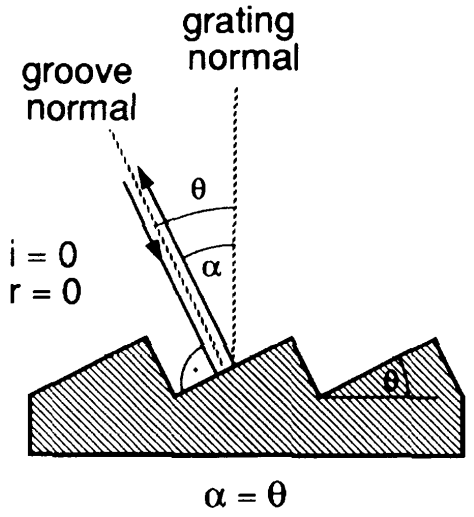
4.2 SPETTROMETRO A RETICOLO

Nel reticolo di Littrow, l'equazione del reticolo per interferenza costruttiva diventa:

$$2dsen\alpha = m\lambda$$

La riflettività massima del reticolo di Littrow è raggiunta quando $i = r = 0$, che porta a $\theta = \alpha$ come mostrato in Figura.

Il reticolo di Littrow può essere usato anche come riflettore selettivo in lunghezza d'onda perché la luce è riflessa solo se la lunghezza d'onda incidente soddisfa la condizione $2dsen\alpha = m\lambda$.



$$d(sen\alpha \pm sen\beta) = m\lambda$$

Calcoliamo la distribuzione d'intensità $I(\beta)$ della luce riflessa quando un'onda piana monocromatica incide su un reticolo generico.

La differenza di cammino ottico tra le onde parziali riflesse da solchi adiacenti è pari a $\Delta s = d(sen\alpha \pm sen\beta)$ e la corrispondente differenza in fase sarà:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s = \frac{2\pi}{\lambda}d(sen\alpha \pm sen\beta)$$

4.2 SPETTROMETRO A RETICOLO

La sovrapposizione di ampiezze riflesse da N solchi nella direzione β darà l'ampiezza totale riflessa espressa come:

$$A_R = \sqrt{R(\beta)} \sum_{m=0}^{N-1} A_g e^{im\phi} = \sqrt{R(\beta)} A_g \sum_{m=0}^{N-1} e^{im\phi}$$

dove $R(\beta)$ è la riflettività del reticolo, che dipende dall'angolo di riflessione β e A_g è l'ampiezza della singola onda parziale incidente su ogni solco.

Nell'ultimo passaggio abbiamo assunto che tutte le riflessioni hanno la stessa ampiezza A_g.

Per poter determinare l'ampiezza, occorre sviluppare la sommatoria:

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{im\phi} = 1 + e^{i\phi} + e^{2i\phi} + .. + e^{i(N-1)\phi}$$

Moltiplichiamo ambo i membri per $(1 - e^{i\phi})$:

$$\left(1 - e^{i\phi}\right) \sum_{m=0}^{N-1} e^{im\phi} = (1 - e^{i\phi})(1 + e^{i\phi} + e^{2i\phi} + .. + e^{i(N-1)\phi})$$

Eseguendo la moltiplicazione al secondo membro, tutti gli addendi si elidono a parte l' 1 e $e^{iN\phi}$.

4.2 SPETTROMETRO A RETICOLO

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{im\phi} = \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}}$$

Quindi sostituendo:

$$A_R = \sqrt{R(\beta)} A_g \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}}$$

$$A_R = \sqrt{R(\beta)} A_g \sum_{m=0}^{N-1} e^{im\phi}$$

Poiché l'intensità dell'onda riflessa è legata all'ampiezza dalla relazione:

$$I_R = \varepsilon_0 c A_R A_R^*$$

si ha che l'intensità dell'onda riflessa sarà:

$$I_R = \varepsilon_0 c R(\beta)\, A_g A_g^* \left| \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}} \right|^2$$

Ricordando che il modulo quadro di un rapporto è pari al rapporto dei moduli quadri:

$$\left| \frac{1 - e^{iN\phi}}{1 - e^{i\phi}} \right|^2 = \frac{\left|1 - e^{iN\phi}\right|^2}{|1 - e^{i\phi}|^2} = \frac{2 - 2cos(N\phi)}{2 - 2cos(\phi)}$$

4.2 SPETTROMETRO A RETICOLO

Utilizzando la relazione trigonometrica $sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1-cos\phi}{2}$

$$\left|\frac{1-e^{iN\phi}}{1-e^{i\phi}}\right|^2 = \frac{sen^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

$$\left|\frac{1-e^{iN\phi}}{1-e^{i\phi}}\right|^2 = \frac{2-2cos(N\phi)}{2-2cos(\phi)}$$

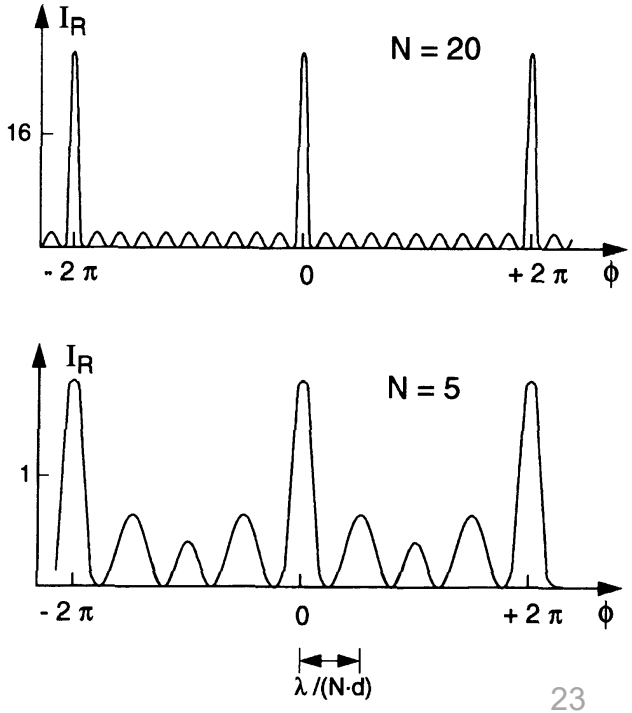
Quindi l'intensità dell'onda riflessa sarà:

$$I_R = I_0 R(\beta)\,\frac{sen^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

$$I_R = \varepsilon_0 c R(\beta)\, A_g A_g^* \left|\frac{1-e^{iN\phi}}{1-e^{i\phi}}\right|^2$$

con $I_0 = \varepsilon_0 c A_g A_g^*$

L'intensità di distribuzione è riportata in Figura per due diversi valori del numero totale di solchi N.

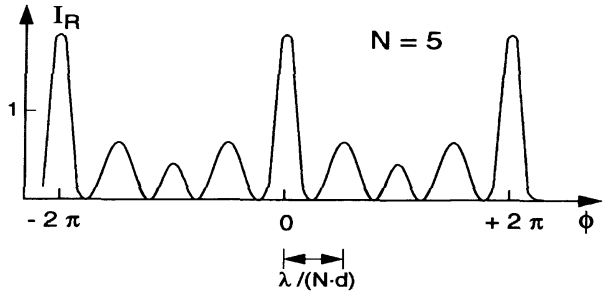


I massimi principali si hanno per $\phi = 2m\pi$, e l'intero m è detto **ordine di interferenza**.

La funzione I_R ha $N-1$ minimi con $I_R = 0$ tra due massimi principali consecutivi. Questi minimi hanno per valori di ϕ tali che $N\frac{\phi}{2} = l\pi$, con $l = 1, 2, \ldots, N-1$

4.2 SPETTROMETRO A RETICOLO

Il profilo di linea $I(\beta)$ del massimo principale di ordine m attorno all'angolo di diffrazione β_m può essere ricavato a partire dall'espressione trovata per I_R, andando a sostituire $\beta = \beta_m + \varepsilon$.



Poiché N è grande, $I(\beta)$ è centrata e piccata attorno a β_m e quindi si può assumere che $\varepsilon \ll \beta_m$.

Usando la relazione:

$$sen(\beta_m + \varepsilon) = sen\beta_m cos\varepsilon + cos\beta_m sen\varepsilon \sim sen\beta_m + \varepsilon cos\beta_m$$

$$I_R = I_0 R(\beta) \frac{sen^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} d(sen\alpha \pm sen\beta)$$

nell'espressione di ϕ

$$\phi(\beta) = \frac{2\pi}{\lambda} d[sen\alpha \pm sen(\beta_m + \varepsilon)] = \frac{2\pi}{\lambda} d[sen\alpha \pm (sen\beta_m + \varepsilon cos\beta_m)]$$

da cui:

$$\phi(\beta) = \frac{2\pi}{\lambda} d[sen\alpha \pm sen\beta_m] \pm \frac{2\pi}{\lambda} d\varepsilon cos\beta_m = 2m\pi \pm \delta_1$$

($2m\pi$)

avendo posto $\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} d\varepsilon cos\beta_m \ll 1$.

4.2 SPETTROMETRO A RETICOLO

Sostituendo nella I_R, si ottiene:

$$I_R = I_0 R(\beta) \frac{sen^2\left(\frac{N\delta_1}{2}\right)}{sen^2\left(\frac{\delta_1}{2}\right)} \simeq I_0 R(\beta)\, N^2 \frac{sen^2\left(\frac{N\delta_1}{2}\right)}{\left(\frac{N\delta_1}{2}\right)^2}$$

$$\phi(\beta) = 2m\pi \pm \delta_1$$

$$I_R = I_0 R(\beta) \frac{sen^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

I primi due minimi su entrambi i lati del massimo centrale si hanno quando:

$$\frac{N\delta_1}{2} = \pm\pi \qquad \text{ovvero} \qquad N\delta_1 = \pm 2\pi$$

$$N\frac{\phi}{2} = l\pi$$

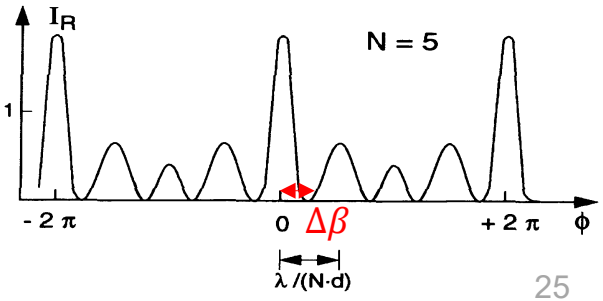
che corrisponde a:

$$\varepsilon_{1/2} = \frac{\pm\lambda}{Ndcos\beta_m}$$

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot \varepsilon \cdot cos\beta_m$$

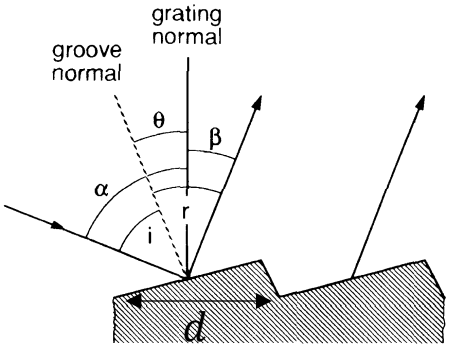
Quindi il massimo centrale di ordine m ha una mezza larghezza pari a:

$$\Delta\beta = \frac{\lambda}{Ndcos\beta_m}$$



4.2 SPETTROMETRO A RETICOLO

$$\Delta\beta = \frac{\lambda}{Ndcos\beta_m}$$



che corrisponde ad una figura di diffrazione prodotta da un'apertura con larghezza $b = Ndcos\beta_m$, che è proprio la dimensione dell'intero reticolo proiettato nella direzione normale a β_m:

Calcoliamo il potere risolvente.

Differenziando l'equazione $d(sen\alpha \pm sen\beta) = m\lambda$ rispetto a λ si ottiene la dispersione angolare rispetto ad un angolo α:

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{m}{dcos\beta}$$

Combinando con la relazione: $d(sen\alpha \pm sen\beta) = m\lambda$, si ottiene:

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{sen\alpha \pm sen\beta}{\lambda cos\beta}$$

Questo dimostra che la dispersione angolare dipende solo dagli angoli α e β e non dal numero di solchi del reticolo.

4.2 SPETTROMETRO A RETICOLO

Per la configurazione di tipo Littrow, con $\alpha = \beta$, si ottiene:

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{2tg\alpha}{\lambda}$$

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{sen\alpha \pm sen\beta}{\lambda cos\beta}$$

Il potere risolvente può essere determinato a partire dalla definizione $\mathrm{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq a\frac{d\theta}{d\lambda}$ e considerando $a = Ndcos\beta$ come la dimensione del reticolo e $\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{d\beta}{d\lambda}$:

$$\frac{d\beta}{d\lambda}\Delta\lambda = \frac{\lambda}{Ndcos\beta}$$

Utilizzando la relazione $\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{sen\alpha \pm sen\beta}{\lambda cos\beta}$, quest'ultima può essere riscritta come:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{Nd(sen\alpha \pm sen\beta)}{\lambda}$$

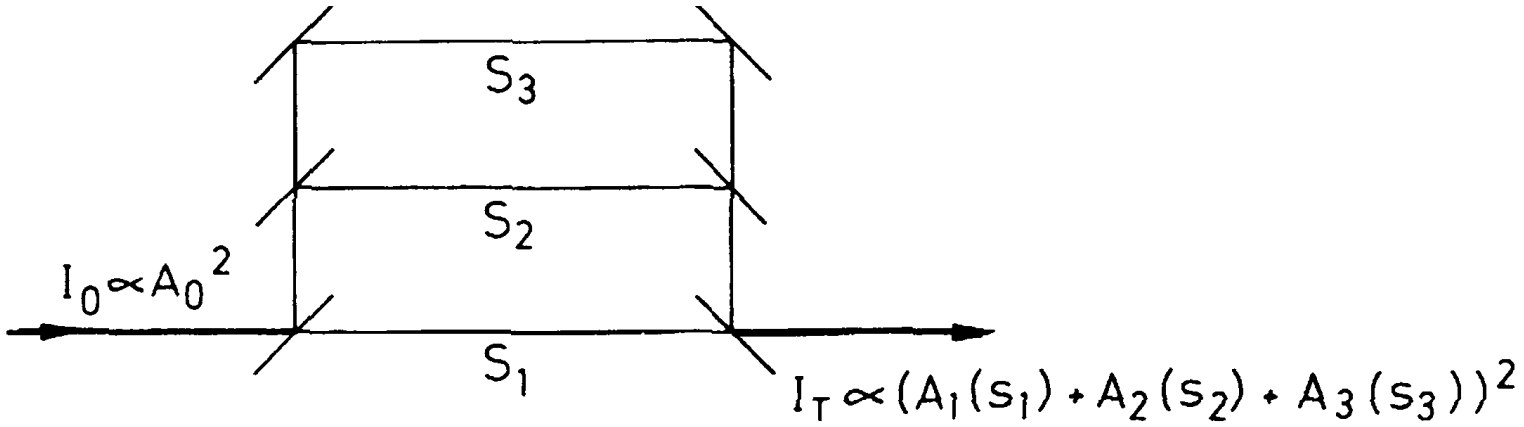
che può essere ridotta, utilizzando $d(sen\alpha \pm sen\beta) = m\lambda$ a:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.1 Concetti di base

Il principio su cui si basa un interferometro è illustrato in Figura.



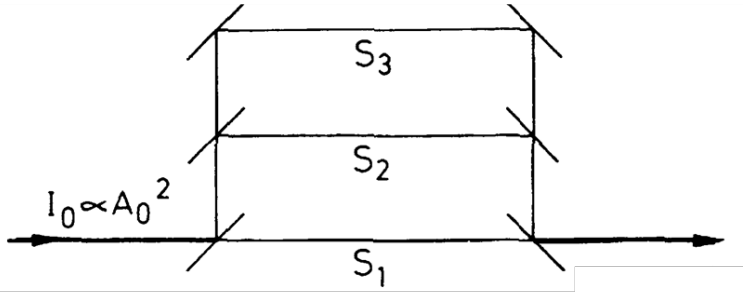
Il fascio laser incidente con intensità I_0 è diviso in due o più fasci parziali con ampiezze A_k ciascuno dei quali percorre un cammino ottico di lunghezza $s_k = nx_k$ (con n indice di rifrazione del mezzo), prima di essere sovrapposti all'uscita dell'interferometro.

Poiché tutti i fasci parziali provengono dalla stessa sorgente luminosa, essi sono coerenti tra loro se la differenza massima di cammino ottico non eccede la lunghezza di coerenza.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.1 Concetti di base

L'ampiezza totale dell'onda trasmessa, che è data dalla sovrapposizione di tutti i fasci parziali, dipende dalle ampiezze A_k e dalle fasi $\phi_k = \phi_0 + \frac{2\pi s_k}{\lambda}$ delle onde parziali. Pertanto un interferometro è sensibilmente dipendente dalla lunghezza d'onda λ.



Il massimo di intensità dell'onda trasmessa è ottenuto quando tutte le onde parziali interferiscono costruttivamente. Questo impone come condizione che la differenza di cammino ottico $\Delta s_{ik} = s_i - s_k$ sia pari a :

$$\Delta s_{ik} = m\lambda, \text{ con } m = 1,2,3 \ldots$$

Supponiamo che Δs_{ik} sia fisso. Le lunghezze d'onda che soddisfanno la condizione $\Delta s_{ik} = m\lambda$ subiranno tutte lo stesso sfasamento.
Pertanto, l'intervallo spettrale:

$$\delta\lambda = \lambda_m - \lambda_{m+1} = \frac{\Delta s}{m} - \frac{\Delta s}{m+1} = \frac{\Delta s}{m^2 + m} = \frac{\lambda_m}{m+1}$$

che rappresenta Free Spectral Range (FSR) dell'interferometro.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.1 Concetti di base

Il FSR è più convenzionalmente espresso in termini di frequenza.

Ponendo $\upsilon = \frac{c}{\lambda}$, si ha che $\Delta s = \frac{mc}{\upsilon_m}$ e il FSR diventa:

$$\delta\upsilon = \upsilon_{m+1} - \upsilon_m = \frac{c}{\Delta s}$$

$\Delta s_{ik} = m\lambda$, con $m = 1,2,3 \ldots$

che è indipendente dall'ordine m.

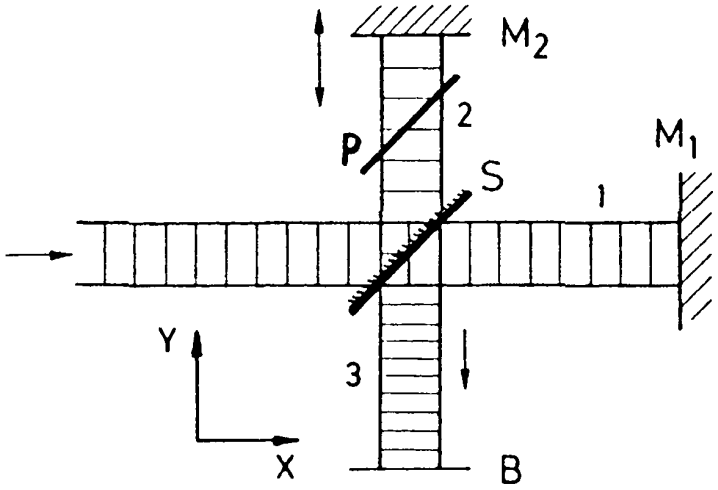
È importante far notare che da una misura interferometrica tutte le lunghezze d'onda $\lambda = \lambda_0 + m\delta\lambda$ sono equivalenti rispetto alla trasmissione dell'interferometro. Quindi per una misura accurata della lunghezza d'onda, si dovrebbe prima misurare λ all'interno di un FSR usando altre tecniche, e poi misurare la lunghezza d'onda con una precisione migliore usando un interferometro, per avere una misura assoluta e accurata della lunghezza d'onda.

Esempi di interferometri con solo due fasci parziali che interferiscono sono l'**interferometro di Michelson** e quello di **Mach-Zehnder**. Interferenza da fasci multipli viene utilizzata negli spettrometri a reticolo, nell'interferometro Fabry-Perot e nei rivestimenti dielettrici a multistrato per ottenere specchi altamente riflettenti.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.2 Interferometro di Michelson

Il principio base di un interferometro di Michelson è illustrato in Figura:



Un'onda piana incidente

$$E = A_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

è divisa in due onde parziali da un beam-splitter S (con riflettività R e trasmittanza T):

$$E_1 = A_1 e^{i(\omega t - kx + \phi_1)}$$

$$E_2 = A_2 e^{i(\omega t - ky + \phi_2)}$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.2 Interferometro di Michelson

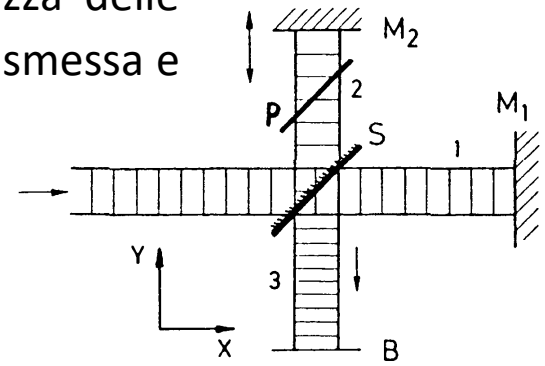
Se il beam-splitter ha assorbimento trascurabile, allora $R + T = 1$ e le ampiezza A_1 e A_2 sono determinate dalle relazioni:

$$\begin{cases} A_1 = \sqrt{R} A_0 \\ A_0^2 = A_1^2 + A_2^2 \end{cases}$$

$$E_1 = A_1 e^{i(\omega t - kx + \phi_1)}$$

$$E_2 = A_2 e^{i(\omega t - ky + \phi_2)}$$

Dopo essere riflesse agli specchi piani M_1 e M_2, i due fasci parziali vengono sovrapposti nel piano di osservazione B. L'ampiezza delle due onde nel piano B sarà: $\sqrt{RT} A_0$ poiché ogni onda sarà trasmessa e riflessa una volta dalla superficie del beam-splitter S.



La differenza di fase tra le due onde sarà:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2(SM_1 - SM_2) + \Delta\phi$$

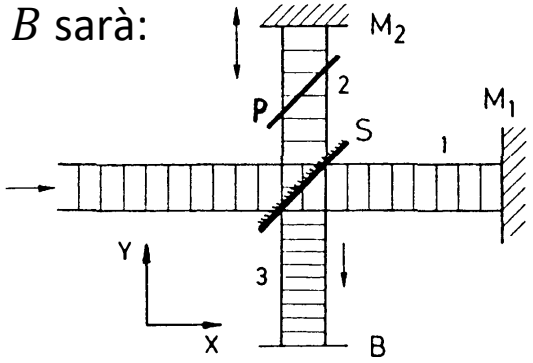
dove $\Delta\phi$ tiene conto di una differenza di fase aggiuntiva che potrebbe essere causata dalle riflessione.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.2 Interferometro di Michelson

L'ampiezza complessa totale del campo di radiazione nel piano B sarà:

$$E = \sqrt{RT}A_0 e^{i(\omega t+\phi_0)}\left(1+e^{i\phi}\right)$$



Il rivelatore ottico posto in B misurerà un'intensità nel tempo I_T pari a:

$$I_T = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 A_0^2 RT(1+e^{i\phi})(1+e^{-i\phi}) = c\varepsilon_0 A_0^2 RT(1+cos\phi) = \frac{1}{2}I_0(1+cos\phi)$$

con $R = T = \frac{1}{2}$ e $I_0 = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 A_0^2$

Quindi I_T può essere vista come una funzione nella variabile ϕ. Come posso variare ϕ? Devo cambiare la lunghezza di uno dei bracci dell'interferometro.

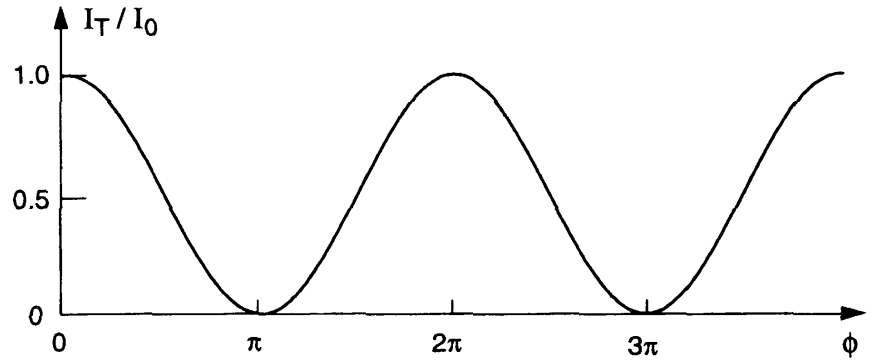
$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}2(SM_1 - SM_2) + \Delta\phi$$

Se lo specchio M_2 è montato su un carrello e si muove di una quantità Δy, la differenza di cammino ottico cambia di $\Delta s = 2n\Delta y$ e la differenza di fase di $2\pi\frac{\Delta s}{\lambda}$.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.2 Interferometro di Michelson

La figura seguente mostra l'intensità $I_T(\phi)$ nel piano B in funzione di ϕ per un'onda monocromatica incidente. Questa prende il nome di **interferogramma**.



$$I_T = \frac{1}{2} I_0 (1 + cos\phi)$$

Per i massimi d'intensità a $\phi = 2m\pi$ $(m = 0,1,2 \dots)$ l'intensità trasmessa I_T è uguale all'intensità incidente I_0 , che vuol dire che la trasmissione dell'interferometro è $T_I = 1$ per $\phi = 2m\pi$.

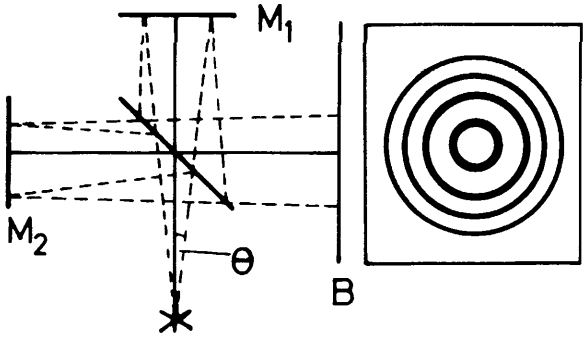
Nei punti di minimo a $\phi = (2m + 1)\pi$, l'intensità trasmessa è 0, che vuol dire che l'onda piana incidente è tutta riflessa indietro alla sorgente.

Questo ci permette di dire che un interferometro può essere usato o come filtro spettrale per la luce trasmessa o come riflettore spettrale.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.2 Interferometro di Michelson

Per fasci di luce divergenti, la differenza di cammino tra due onde dipende dall'angolo di inclinazione:



Nel piano B si formerà una figura di interferenza a frange circolari, concentriche all'asse di simmetria del sistema. Muovendo lo specchio M_2, li diametro degli anelli cambierà. In ogni caso, l'intensità distribuita su una piccola apertura seguirà approssimativamente la funzione $I_T(\phi)$ della figura precedente.

L'interferometro di Michelson può essere usato anche per **effettuare misure assolute della lunghezza d'onda**, contando il numero N di massimi in B quando lo specchio M_2 si muove lungo una distanza nota Δy.

In tal caso, la lunghezza d'onda λ sarà data da:

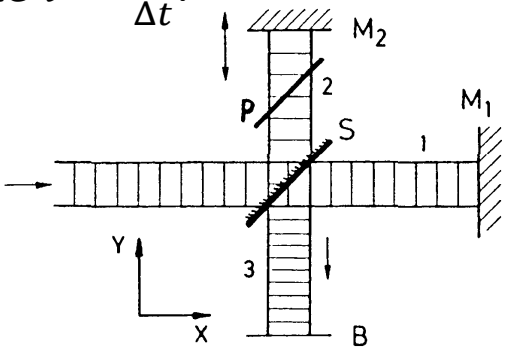
$$\lambda = \frac{\Delta s}{N} = \frac{2n\Delta y}{N}$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.2 Interferometro di Michelson

L'interferometro di Michelson può essere descritto anche in una maniera diversa, del tutto equivalente alla precedente.

Assumiamo che lo specchio M_2 si muova con una velocità costante $v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$.



Un'onda con frequenza ω a vettore d'onda $\vec{k}$ che incide perpendicolarmente sullo specchio mobile subirà una variazione di frequenza per effetto Doppler in riflessione :

$$\Delta\omega = \omega - \omega' = 2\vec{k}\cdot\vec{v} = \frac{4\pi}{\lambda}v$$

Di conseguenza la differenza di cammino ottico diventa $\Delta s = 2vt = \frac{\lambda t \Delta\omega}{2\pi}$

e la corrispondente differenza di fase $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s = t\Delta\omega$

Quindi I_T può essere vista come:

$$I_T = \frac{1}{2}I_0(1 + cos\Delta\omega t)$$

$$I_T = \frac{1}{2}I_0(1 + cos\phi)$$

Riconosciamo in questa espressione il segnale di battimento mediato nel tempo ottenuto dalla sovrapposizione di due onde con frequenza ω e $\omega' = \omega - \Delta\omega$.

4.3 INTERFEROMETRI

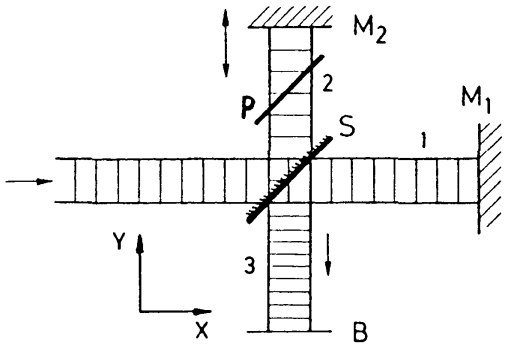
4.3.2 Interferometro di Michelson

Da notare che la frequenza $\omega = \frac{c}{v}\frac{\Delta\omega}{2}$ dell'onda incidente può essere misurata dalla frequenza di battimento $\Delta\omega$, a parte che sia nota la velocità dello specchio.

$$\Delta\omega = \frac{4\pi}{\lambda} v$$

Se la velocità è costante, l'interferometro di Michelson può essere visto come un dispositivo che trasforma le alte frequenze ω $(10^{14} - 10^{15}\ Hz)$ nel più accessibile intervallo di frequenze sonore $\frac{v}{c}\omega$.

La differenza di cammino massima Δs che permette ancora di avere frange di interferenza nel piano B è limitata dalla lunghezza di coerenza della luce incidente.



Utilizzando lampade spettrali, la lunghezza di coerenza è limitata dall'allargamento Doppler delle righe spettrali e tipicamente è di qualche cm.

Utilizzando laser stabilizzati a singolo modo di emissione, si possono raggiungere lunghezze di coerenza di diversi km.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.2 Interferometro di Michelson

Quando la radiazione incidente è composta da diverse componenti spettrali con frequenze ω_k, l'ampiezza totale nel piano B registrata dal rivelatore sarà la somma delle ampiezze d'interferenza:

$$E = \sum_k A_k e^{i(\omega_k t + \phi_{0k})}\left(1 + e^{i\phi_k}\right)$$

$$E = \sqrt{RT}\, A_0 e^{i(\omega t + \phi_0)}\left(1 + e^{i\phi}\right)$$

Il rivelatore restituisce un segnale proporzionale alle somma di tutti i contributi di intensità I_k derivanti da tutte le componenti cromatiche che costituiscono il fascio d'ingresso. Pertanto l'intensità totale dipendente dal tempo:

$$I_T = \sum_k \frac{1}{2} I_{0k}(1 + cos\phi_k) = \sum_k \frac{1}{2} I_{0k}(1 + cos\Delta\omega_k t)$$

$$I_T = \frac{1}{2} I_0 (1 + cos\phi)$$

dove le frequenze audio $\Delta\omega_k = \frac{2\omega_k v}{c}$ sono determinare dalle frequenze ω_k delle componenti spettrali e dalla velocità v dello specchio mobile.

Misurando le frequenze $\Delta\omega_k$ è possibile ricostruire lo spettro delle componenti ω_k dell'onda incidente (**spettroscopia a Trasformata di Fourier**).

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.2 Interferometro di Michelson

Se assumiamo che l'onda incidente consiste di due sole componenti di frequenza ω_1 e ω_2, la figura di interferenza varierà con tempo secondo la legge:

$$\bar{I} = \frac{1}{2} I_{10} \left[1 + cos\left(2\omega_1 \frac{v}{c} t\right)\right] + \frac{1}{2} I_{20} \left[1 + cos\left(2\omega_2 \frac{v}{c} t\right)\right]$$
$$= I_0 \left\{1 + cos\left[(\omega_1 - \omega_2)\frac{v}{c} t\right] cos\left[(\omega_1 + \omega_2)\frac{v}{c} t\right]\right\}$$

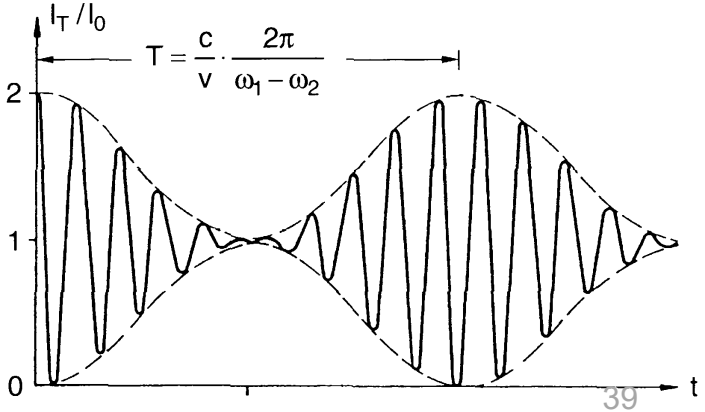
$$\bar{I} = \sum_k \frac{1}{2} I_{0k}(1 + cos\Delta\omega_k t)$$

$$\omega = \frac{c}{v}\frac{\Delta\omega}{2}$$

dove si è assunto $I_{10} = I_{20} = I_0$.

e abbiamo usato la relazione $\cos\alpha cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ ponendo $\alpha = \omega_1 - \omega_2$ e $\beta = \omega_1 + \omega_2$:

Questo è un **segnale di battimento**, dove l'ampiezza del segnale di interferenza a $(\omega_1 + \omega_2)\frac{v}{c}$ è modulata alla frequenza differenza $(\omega_1 - \omega_2)\frac{v}{c}$



4.3 INTERFEROMETRI

4.3.2 Interferometro di Michelson

Il **potere risolvente spettrale** può essere determinata seguendo questo ragionamento.

Se Δy è la differenza di cammino generata dallo specchio mobile, il numero di massimi di interferenza contati dal rivelatore sarà:

$N_1 = \frac{2\Delta y}{\lambda_1}$ per un'onda incidente con lunghezza d'onda λ_1

$N_2 = \frac{2\Delta y}{\lambda_2}$ per un'onda incidente con lunghezza d'onda λ_2, con $\lambda_2 < \lambda_1$.

Le due lunghezze d'onda potranno essere distinguibili se $N_2 \geq N_1 + 1$.

Supponendo $\lambda_1 = \lambda_2 + \Delta\lambda$, con $\Delta\lambda \ll \lambda$, e $\lambda = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$, il potere risolvente spettrale sarà:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2\Delta y}{N_1} + \frac{2\Delta y}{N_2}\right)}{\frac{2\Delta y}{N_1} - \frac{2\Delta y}{N_2}} = \frac{1}{2}\frac{\frac{N_1 + N_2}{N_1 N_2}}{\frac{N_2 - N_1}{N_1 N_2}} = \frac{1}{2}\frac{N_1 + N_2}{N_2 - N_1}$$

$$\lambda_1 = \frac{2\Delta y}{N_1}$$

$$\lambda_2 = \frac{2\Delta y}{N_2}$$

Imponendo la condizione di minima affinché le due lunghezze d'onda siano distinguibili, $N_2 = N_1 + 1$, al denominatore della relazione appena trovata:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{N_1 + N_2}{2} = N = \frac{\Delta s}{\lambda} \quad \text{con } N = \frac{N_1+N_2}{2}.$$

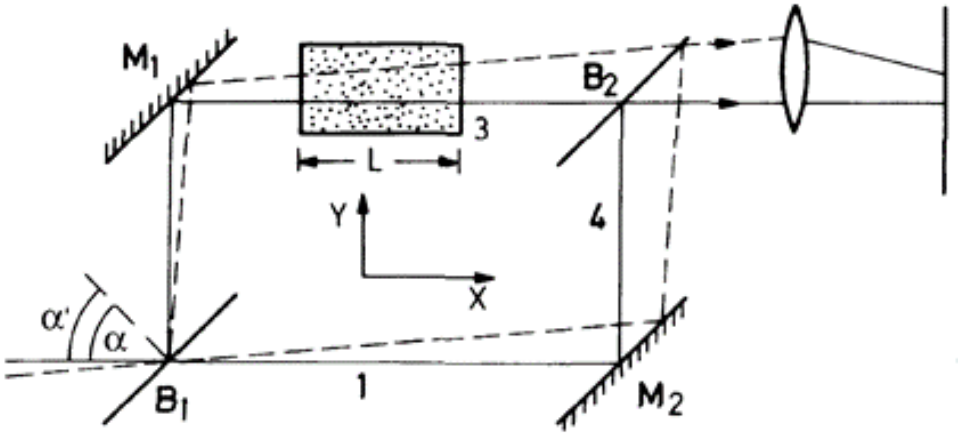
Il potere risolvente spettrale dipende esclusivamente dal conteggio delle frange di interferenza.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.3 Interferometro di Mach-Zender

Analogamente all'interferometro di Michelson, l'**interferometro di Mach-Zender** si basa sull'interferenza tra due fasci generati da un'onda che incide su un beam-splitter.

Due onde viaggiano lungo due diversi cammini paralleli che differiscono di Δs.



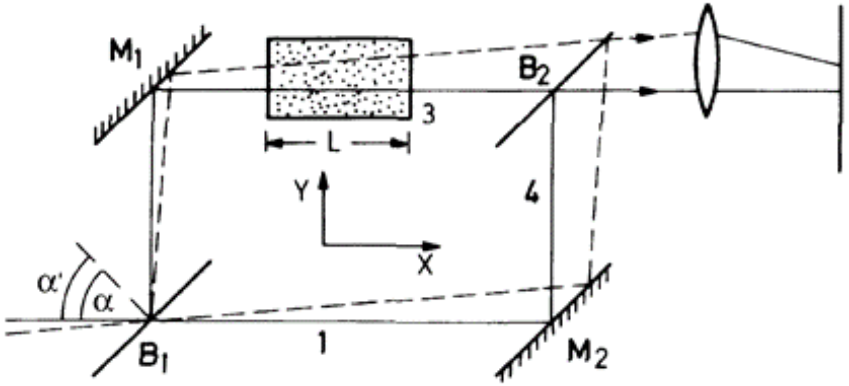
Inserendo un oggetto trasparente in uno dei due cammini, si altera la differenza di cammino ottico tra i due fasci.

Questo produce una variazione della figura di interferenza, che consente una stima accurata dell'indice di rifrazione del campione e della sua variazione locale.

Difatti, l'interferometro di Mach-Zender è spesso usato come un **rifrattometro**.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.3 Interferometro di Mach-Zender



Se i beam-splitter B_1 e B_2 e gli specchi M_1 e M_2 sono perfettamente paralleli, la differenza di cammino tra i due fasci secondari non dipende dall'angolo di incidenza α perché la differenza di cammino tra i fasci 1 e 3 è perfettamente compensata dalla stessa lunghezza di cammino del fascio 4 tra M_2 e B_2.

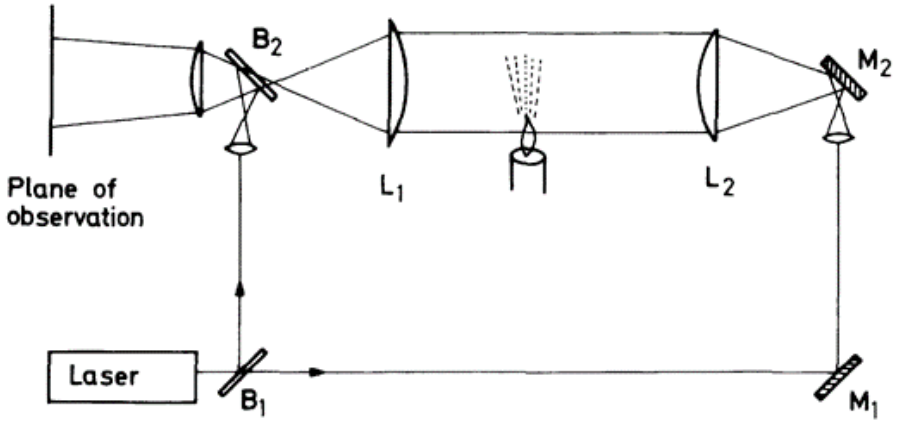
Questo vuol dire che le onde interferenti avranno lo stesso cammino ottico sia sul cammino rappresentato in figura dalla linea continua, che su quello rappresentato dalla linea tratteggiata.

Senza il campione, la differenza di cammino sarà zero; con il campione la differenza di cammino sarà $\Delta s = (n-1)L$ dove n è l'indice di rifrazione del campione posto su uno dei due bracci dell'interferometro.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.3 Interferometro di Mach-Zender

Se si espande il fascio sul cammino 3, si avrà un'espansione della figura di interferenza correlata con la variazione spaziale locale dell'indice di rifrazione del campione.



Con un beam-expander come rappresentato in Figura, un fascio laser ad alta coerenza spaziale può essere espanso fino a 10-20 cm permettendo di analizzare campioni di grandi dimensioni.

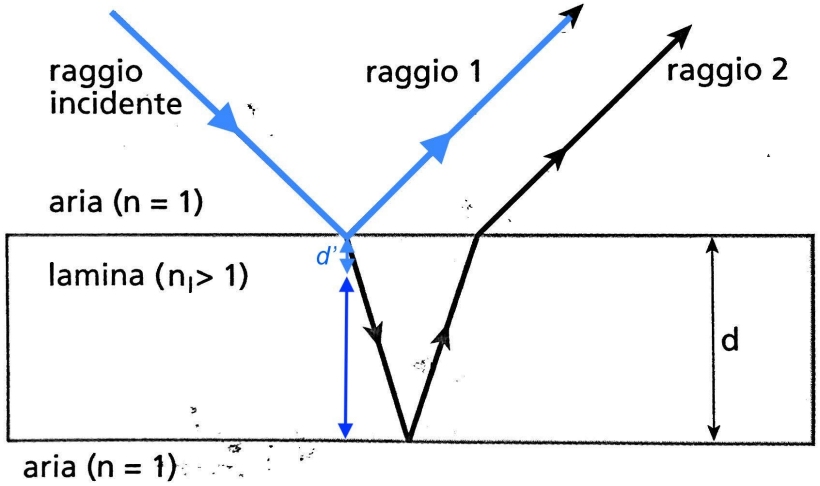
La figura di interferenza può essere o fotografata oppure vista direttamente con una camera. Il vantaggio di usare un laser nell'interferometro di Mach-Zender è che il diametro del fascio laser può essere mantenuto piccolo ovunque, a parte tra le due lenti L_1 e L_2.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli

In uno spettrometro a reticolo, le onde parziali interferenti emessi da diversi solchi del reticolo hanno tutte la stessa ampiezza.

In contrapposizione, negli interferometri da fasci multipli le onde parziali sono prodotte da riflessioni multiple su superfici piane o curve e pertanto la loro ampiezza decresce con l'aumentare del numero di riflessioni.



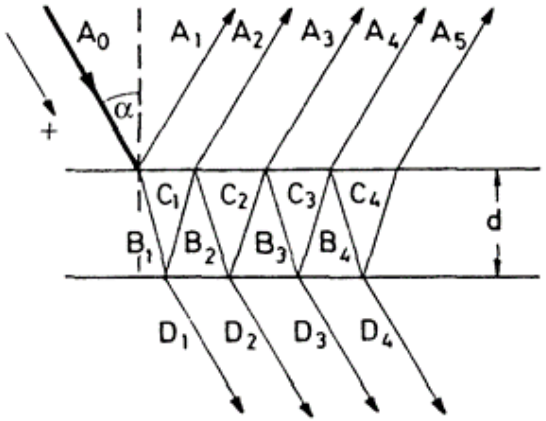
Pertanto, la distribuzione d'intensità differirà da quella trovata per un reticolo

$$I_R = I_0 R(\beta) \frac{sen^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli

Assumiamo che un'onda piana $E = A_0 e^{i(\omega t - kx)}$ incida con un angolo α su una lastra piana trasparente formata da due superfici parallele e parzialmente riflettenti



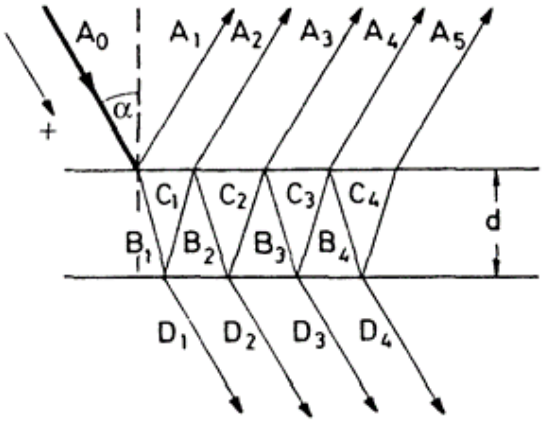
Ad ogni superficie, l'ampiezza A_i è divisa in una componente riflessa $A_R = A_i\sqrt{R}$ e una componente rifratta $A_T = A_i\sqrt{1-R}$, nell'ipotesi di trascurare l'assorbimento.

La riflettività $R = \frac{I_R}{I_i}$ dipende dall'angolo di incidenza α e dalla polarizzazione dell'onda incidente.

Noto l'indice di rifrazione n, R può essere calcolato usando le formule di Fresnel.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli



Dalla Figura, è possibile ricavare le espressioni per le ampiezze A_i delle onde riflesse dallo strato superiore, le ampiezze B_i delle onde rifratte, le ampiezze C_i delle onde riflesse dallo strato inferiore e le ampiezze D_i delle onde trasmesse:

$$|A_1| = \sqrt{R}|A_0|$$

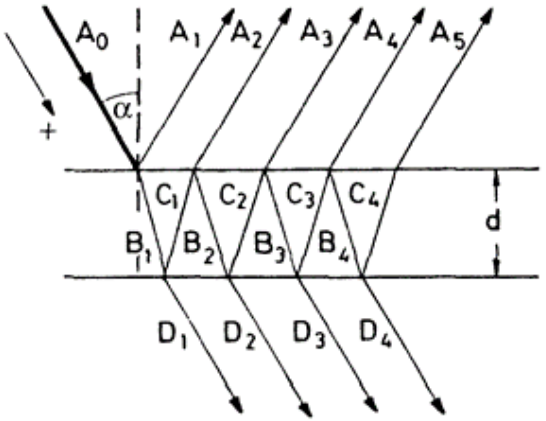
$$|B_1| = \sqrt{1-R}|A_0|$$

$$|C_1| = \sqrt{R}|B_1| = \sqrt{R(1-R)}|A_0|$$

$$|D_1| = \sqrt{1-R}|B_1| = (1-R)|A_0|$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli



A seguire…

$$|A_2| = \sqrt{1-R}|C_1| = (1-R)\sqrt{R}|A_0|$$

$$|B_2| = \sqrt{R}|C_1| = R\sqrt{(1-R)}|A_0|$$

$$|C_2| = \sqrt{R}|B_2| = R\sqrt{R(1-R)}|A_0|$$

$$|D_2| = \sqrt{1-R}|B_2| = R(1-R)|A_0|$$

e poi:

$$|A_3| = \sqrt{1-R}|C_2| = R\sqrt{R}(1-R)|A_0|$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli

Proseguendo, è facile verificare che lo schema può essere generalizzato come segue:

$$|A_{i+1}| = R|A_i| \text{ per } i \geq 2$$

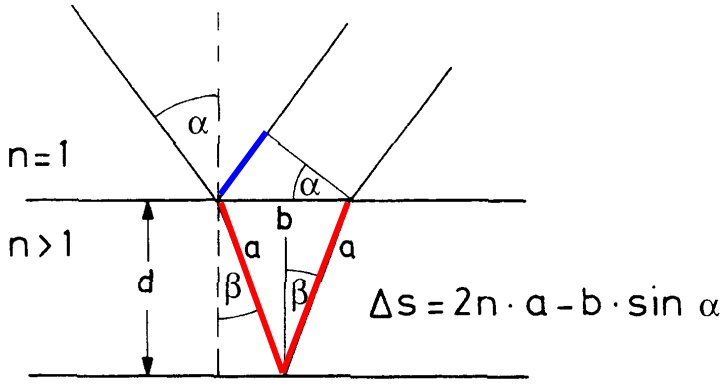
$$|D_{i+1}| = R|D_i| \text{ per } i \geq 1$$

$$|A_1| = \sqrt{R}|A_0|$$
$$|A_2| = (1-R)\sqrt{R}|A_0|$$
$$|A_3| = R\sqrt{R}(1-R)|A_0|$$

$$|D_1| = (1-R)|A_0|$$
$$|D_2| = \sqrt{1-R}|B_2| = R(1-R)|A_0|$$

La differenza di cammino ottico tra due onde parziali riflesse consecutivamente sarà:

$$\Delta s = 2na - bsen\alpha$$



Dalla figura si evince che all'interno della lastra:

$$d = acos\beta \qquad \frac{b}{2} = dtg\beta$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli

$$\Delta s = 2na - bsen\alpha$$
$$d = acos\beta$$
$$\frac{b}{2} = dtg\beta$$

Sostituendo:

$$\Delta s = 2n\frac{d}{cos\beta} - 2dtg\beta sen\alpha$$

Usiamo la relazione di Snell

$$sen\alpha = nsen\beta$$

ed esprimiamo la differenza di cammino ottico come:

$$\Delta s = 2n\frac{d}{cos\beta} - 2d\frac{sen\beta}{cos\beta}nsen\beta = 2n\frac{d}{cos\beta} - 2nd\frac{1-cos^2\beta}{cos\beta} = 2ndcos\beta$$
$$= 2nd\sqrt{1-sen^2\beta}$$

La differenza di cammino ottico causa una corrispondente differenza di fase:

$$\phi = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda} + \Delta\phi$$

dove $\Delta\phi$ tiene conto di possibili sfasamenti dovuti alle riflessioni.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli

Se ad esempio l'onda incidente con ampiezza A_1 subisce uno sfasamento $\Delta\phi = \pi$ quando viene riflessa dal mezzo con indice di rifrazione $n > 1$, allora, includendo questo sfasamento, si avrà:

$$A_1 = \sqrt{R}|A_0|e^{i\pi} = -\sqrt{R}|A_0|$$

$$|A_1| = \sqrt{R}|A_0|$$

Tenendo conto di questo sfasamento, e che tutti gli $|A_i|$ per $i \geq 1$ non subiscono sfasamento perché la riflessione avviene all'interno della lastra, avremo:

$$|A_1| = -\sqrt{R}|A_0|$$

$$|A_2| = (1-R)\sqrt{R}|A_0|$$

$$|A_{i+1}| = R|A_i| \text{ per } i \geq 2,$$

$$|A_1| = \sqrt{R}|A_0|$$
$$|A_2| = (1-R)\sqrt{R}|A_0|$$
$$|A_3| = R\sqrt{R}(1-R)|A_0|$$
$$|A_{i+1}| = R|A_i| \text{ per } i \geq 2$$

e quindi l'ampiezza totale A dell'onda riflessa come:

$$A = -\sqrt{R}|A_0| + (1-R)\sqrt{R}|A_0|e^{i\phi} + \sum_{m=3}^{p} A_m e^{i(m-1)\phi}$$

$$= -\sqrt{R}|A_0|\left[1 - (1-R)e^{i\phi}\sum_{m=0}^{p-2} R^m e^{im\phi}\right]$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli

$$A = -\sqrt{R}|A_0|\left[1-(1-R)e^{i\phi}\sum_{m=0}^{p-2}R^m e^{im\phi}\right]$$

Se supponiamo un numero infinito di riflessioni, la serie geometrica $\sum_{m=0}^{p-2}\left(Re^{i\phi}\right)^m$ è convergente perché $|R|<1$ e quindi per $p\to\infty$:

$$\sum_{m=0}^{p-2}R^m e^{im\phi}=\frac{1}{1-Re^{i\phi}}$$

Sostituendo:

$$A=-\sqrt{R}|A_0|\left[1-\frac{(1-R)e^{i\phi}}{1-Re^{i\phi}}\right]=\sqrt{R}|A_0|\frac{1-e^{i\phi}}{1-Re^{i\phi}}$$

Calcoliamo l'intensità dell'onda riflessa come $I_R=\frac{1}{2}c\varepsilon_0 AA^*$

$$I_R=\frac{1}{2}c\varepsilon_0 AA^*=\frac{1}{2}c\varepsilon_0 R|A_0|^2\frac{1-e^{i\phi}}{1-Re^{i\phi}}\cdot\frac{1-e^{-i\phi}}{1-Re^{-i\phi}}$$

$$=\frac{1}{2}c\varepsilon_0 R|A_0|^2\frac{2-e^{-i\phi}-e^{i\phi}}{1-Re^{-i\phi}-Re^{i\phi}+R^2}=\frac{1}{2}c\varepsilon_0 R|A_0|^2\frac{2-2cos\phi}{1+R^2-2Rcos\phi}$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli

$$I_R = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 R |A_0|^2 \frac{2 - 2cos\phi}{1 + R^2 - 2Rcos\phi}$$

Ponendo $I_0 = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 |A_0|^2$ e usando la formula trigonometrica: $sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1-cos\phi}{2}$, possiamo riscrivere l'intensità dell'onda riflessa come:

$$I_R = I_0 R \frac{4sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}{1 + R^2 - 2R + 2R - 2Rcos\phi} = I_0 R \frac{4sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}{(1-R)^2 + 4Rsen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

In maniera analoga, è possibile determinare l'intensità totale D dell'onda trasmessa.

$$D = \sum_{m=1}^{\infty} D_m e^{i(m-1)\phi} = (1-R)A_0 \sum_{m=0}^{\infty} R^m e^{im\phi}$$

$$|D_1| = (1-R)|A_0|$$
$$|D_2| = R(1-R)|A_0|$$
$$|D_{i+1}| = R|D_i| \text{ per } i \geq 1$$

Considerando la convergenza della serie geometrica esattamente come il caso precedente, si ottiene:

$$D = \frac{(1-R)A_0}{1 - Re^{i\phi}}$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli

$$D = \frac{(1-R)A_0}{1-Re^{i\phi}}$$

L'intensità dell'onda trasmessa sarà (i calcoli sono identici al caso dell'onda riflessa):

$$I_T = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 DD^* = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 \frac{(1-R)^2|A_0|^2}{(1-R)^2 + 4Rsen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} = I_0 \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4Rsen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

Le due equazioni trovate per I_R e I_T prendono il nome di **formule di Airy**.

Introducendo $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$

le equazioni di Airy si presentano nella forma:

$$I_R = I_0 \frac{Fsen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}{1 + Fsen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

$$I_T = I_0 \frac{1}{1 + Fsen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

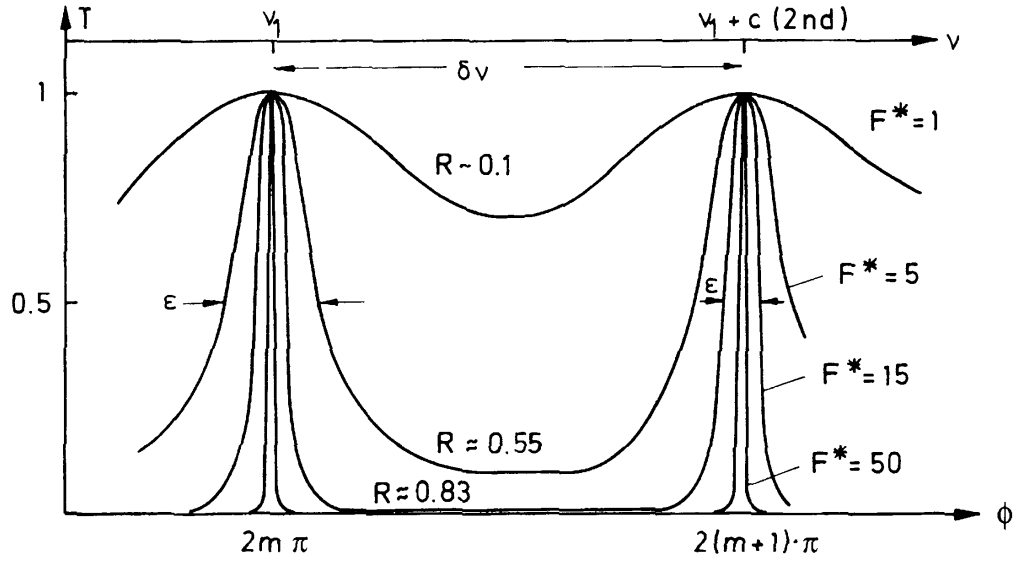
$$I_R = I_0 R \frac{4sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}{(1-R)^2 + 4Rsen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

$$I_T = I_0 \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4Rsen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli

La Figura seguente mostra I_T per diversi valori della riflettività R.



$$I_T = I_0 \frac{1}{1 + F sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

Il massimo della trasmittanza ($T = I_T/I_0$) è $T = 1$ per $\phi = 2m\pi$. In corrispondenza di questi massimi, $I_T = I_0$ e di conseguenza l'intensità riflessa $I_R = 0$.

I minimi di trasmittanza si hanno quando $sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = 1$, ai quali corrisponde:

$$T_{min} = \frac{1}{1+F} = \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2}} = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R} = \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^2$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli

Free spectral range e Finesse

L'intervallo di frequenza $\delta\upsilon$ tra due massimi rappresenta il free spectral range dell'interferometro.

Riscriviamo la differenza di cammino ottico Δs come:

$$\Delta s = 2ndcos\beta = 2nd\sqrt{1 - sen^2\beta} = 2nd\sqrt{1 - \frac{sen^2\alpha}{n^2}}$$

$$= 2d\sqrt{n^2 - sen^2\alpha}$$

$\Delta s = 2nd\sqrt{1 - sen^2\beta}$

$sen\alpha = nsen\beta$

così da esprimere il FSR come:

$$\delta\upsilon = \frac{c}{\Delta s} = \frac{c}{2d\sqrt{n^2 - sen^2\alpha}}$$

$\delta\upsilon = \frac{c}{\Delta s}$

Nel caso di incidenza verticale ($\alpha = 0$), il FSR diventa:

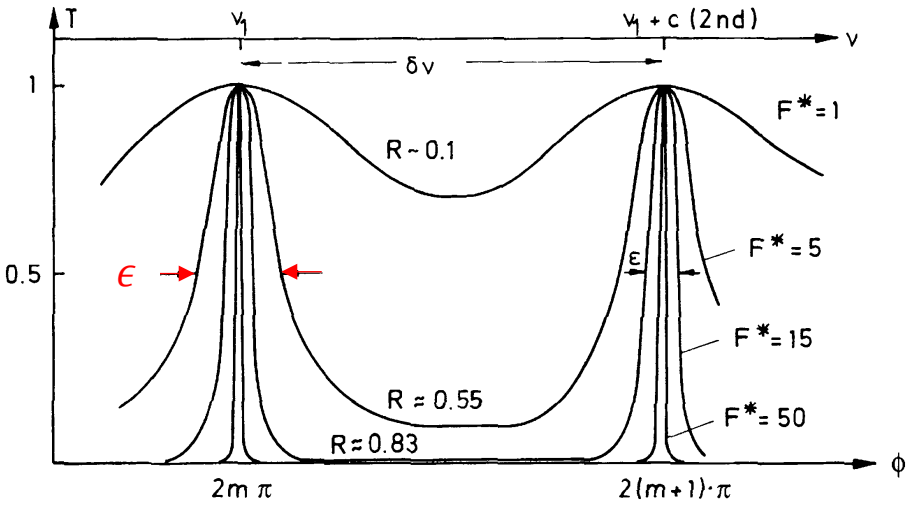
$$\delta\upsilon = \frac{c}{2nd}$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli

Free spectral range e Finesse

La full-width half-maximum $\epsilon = |\phi_1 - \phi_2|$ a cui $I(\phi_1) = I(\phi_2) = I_0/2$ del picco di trasmissione può essere calcolata usando l'espressione ricavata precedentemente per I_T.



Valutiamo il valore di ϕ_1 per il quale I_T si riduce della metà:

$$\frac{I_0}{2} = I_0 \frac{1}{1 + F sen^2\left(\frac{\phi_1}{2}\right)}$$

da cui:

$$sen^2\left(\frac{\phi_1}{2}\right) = \frac{1}{F}$$

e quindi:

$$\phi_1 = 2arcsen\frac{1}{\sqrt{F}} = 2arcsen\left(\frac{1-R}{2\sqrt{R}}\right) \quad \text{da cui} \quad \epsilon = 4arcsen\left(\frac{1-R}{2\sqrt{R}}\right)$$

$$I_T = I_0 \frac{1}{1 + F sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli

Free spectral range e Finesse

Se supponiamo che $R \approx 1$, allora $(1-R) \ll R$ e quindi:

$$\epsilon \approx 4\left(\frac{1-R}{2\sqrt{R}}\right) = 2\left(\frac{1-R}{\sqrt{R}}\right) = \frac{4}{\sqrt{F}}$$

$$\epsilon = 4arcsen\left(\frac{1-R}{2\sqrt{R}}\right)$$

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

Occorre adesso convertire $\epsilon = \Delta\phi$ in unità di frequenza.

Partendo dalla definizione di $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s$ e combinandola con le espressioni: $\lambda = \frac{c}{\nu}$ e $\delta\upsilon = \frac{c}{\Delta s}$, si ottiene di $\phi = \frac{2\pi\upsilon}{\delta\upsilon}$, ovvero $\epsilon = \Delta\phi = \frac{2\pi\Delta\upsilon}{\delta\upsilon}$, da cui:

$$\Delta\upsilon = \frac{\epsilon}{2\pi}\delta\upsilon = \frac{c}{2nd}\frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}$$

$$\delta\upsilon = \frac{c}{2nd}$$

Il rapporto $\delta\upsilon/\Delta\upsilon$ tra il free spectral range e la larghezza a mezza altezza del picco di trasmissione è chiamata **Finesse F^*** dell'interferometro e vale:

$$F^* = \frac{\delta\upsilon}{\Delta\upsilon} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} = \frac{\pi}{2}\sqrt{F}$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli

Free spectral range e Finesse

$$F^* = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} = \frac{\pi}{2}\sqrt{F}$$

Poiché abbiamo assunto una lastra con superficie paralleli e di alta qualità, la finesse dipende solo dalla riflettività R delle due superfici.

In pratica, se le superfici non sono piani ideali e hanno delle leggere inclinazioni, questi fattori causano imperfezioni nella sovrapposizione delle onde interferenti. Questo produce sia una diminuzione che un allargamento del massimo di trasmissione, e quindi una riduzione della finesse.

Risoluzione spettrale

La risoluzione spettrale, $\upsilon/\Delta\upsilon$ di un interferometro è determinata dal suo FSR $\delta\upsilon$ e dalla finesse F^*.

$$F^* = \frac{\delta\upsilon}{\Delta\upsilon}$$

Due onde incidenti con frequenza υ_1 e $\upsilon_2 = \upsilon_1 + \Delta\upsilon$ possono essere considerate risolte se la loro separazione in frequenza $\Delta\upsilon$ è più grande di $\delta\upsilon/F^*$, che vuol dire che la separazione tra i picchi deve essere più grande della loro full-width half-maximum.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli

Risoluzione spettrale

Quindi il potere risolvente spettrale di un interferometro sarà:

$$\frac{\upsilon}{\Delta\upsilon} = \frac{\upsilon}{\delta\upsilon} F^*$$

$$R = \frac{\upsilon}{\Delta\upsilon} \qquad F^* = \frac{\delta\upsilon}{\Delta\upsilon}$$

che può essere espresso in termine di differenza di cammino ottico Δs tra due onde parziali successive:

$$\frac{\upsilon}{\Delta\upsilon} = \frac{\upsilon}{c}\Delta s F^* = F^* \frac{\Delta s}{\lambda}$$

$$\delta\upsilon = \frac{c}{\Delta s}$$

Il potere risolvente spettale è il prodotto tra la finesse e la differenza di cammino ottico in unità di lunghezze d'onda.

Paragonando questo risultato con il potere risolvente spettrale di uno spettrometro a reticolo con N solchi reticolari, si evince che la finesse può essere interpretata come il numero effettivo di onde parziali che interferiscono.

$$\frac{\upsilon}{\Delta\upsilon} = mN = N\frac{\Delta s}{\lambda}$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli

Se consideriamo perdite per assorbimento per ogni superficie riflettente, la relazione tra riflettività e trasmittività deve tener conto di un contributo A dovuto alle perdite, ovvero $A = 1 - R - T$. Con questa modifica, l'ampiezza totale dell'onda trasmessa diviene:

$$D = \frac{(1 - R - A)A_0}{1 - Re^{i\phi}}$$

$$D = \frac{(1 - R)A_0}{1 - Re^{i\phi}}$$

e l'intensità dell'onda trasmessa sarà (i calcoli al denominatore sono identici al caso dell'onda riflessa):

$$I_T = 2c\varepsilon_0 DD^* = I_0 \frac{(1 - R - A)^2}{(1 - R)^2 + 4Rsen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

$$I_T = I_0 \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4Rsen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

L'intensità totale dell'onda trasmessa quando si considerano le perdite sarà:

$$I_T = I_0 \frac{(1 - R - A)^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + 4Rsen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)} = I_0 \frac{T^2}{(A + T)^2} \frac{1}{1 + 4Rsen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.4 Interferenza da fasci multipli

L'assorbimento causa due effetti principali:

$$I_T = I_0 \frac{T^2}{(A+T)^2} \frac{1}{1 + 4R sen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

1. Il massimo di trasmissione decresce di un fattore:

$$\frac{I_T}{I_0} = \frac{T^2}{(A+T)^2} = \frac{T^2}{(1-R)^2} < 1$$

Anche nel caso di un assorbimento piccolo su ogni superficie riflettente, si può avere una drastica riduzione della trasmittività totale.

Ad esempio, se $R = 0.9$, $T = 0.05$ e $A = 0.05$, il fattore $\frac{T^2}{(1-R)^2} = 0.25$.

2. Il fattore F diventa:

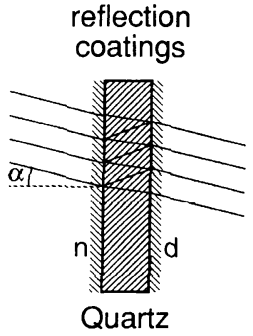
$$F = \frac{4R}{(1-R)^2} = \frac{4(1-T-A)}{(T+A)^2}$$

che decresce con l'aumentare di A. Poiché $F^* = \frac{\pi}{2}\sqrt{F}$, ne segue che la finesse diminuisce e i picchi di trasmissione diventano più larghi, a causa della diminuzione del numero di onde parziali interferenti.

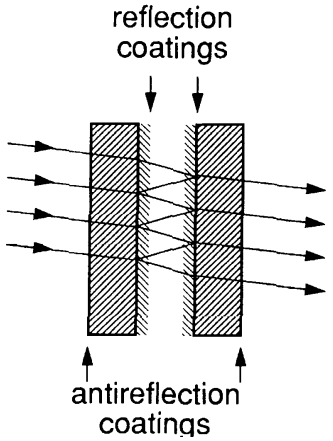
4.3 INTERFEROMETRI

4.3.5 Interferometro Fabry-Perot

Un utilizzo pratico dell'interferenza di fasci multipli può essere individuato in lastre di vetro o quarzo fuso a facce piane parallele ricoperte con rivestimenti antiriflesso



oppure due lastre separate, dove una delle due superfici di ogni lastra è ricoperta con uno strato altamente riflettente.



Le due superfici riflettenti sono opposte e allineate parallelamente tra loro, formando un interferometro Fabry-Perot. Tali configurazioni sono dette **etalon**.

Le superfici esterne sono ricoperte con strati antiriflesso in modo da evitare riflessioni da queste superfici che potrebbero sovrapporsi alla figura di interferenza.

Entrambe le tipologie di interferometro possono essere utilizzate sia con luce parallela che divergente. Affronteremo solo il caso di illuminazione con luce parallela.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.5 Interferometro Fabry-Perot

Nella spettroscopia laser, gli etalon sono utilizzati come filtri in trasmissione selettivi in lunghezza d'onda all'interno di risonatori laser per ridurre la banda spettrale di emissione.

La lunghezza d'onda λ_m o la frequenza υ_m dell'ordine m del massimo di trasmissione, dove la differenza di cammino ottico tra fasci successivi è sarà:

$$\lambda_m = \frac{2nd}{m} cos\beta \quad \text{ovvero} \quad \upsilon_m = \frac{mc}{2ndcos\beta}$$

$$\Delta s = 2ndcos\beta$$

$$\Delta s = m\lambda$$

$$I_T = I_0 \frac{T^2}{(A+T)^2} \frac{1}{1 + 4Rsen^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

$$\phi = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda}$$

Per tutte le lunghezze d'onda $\lambda = \lambda_m$ con $m = 0,1,2 \ldots$ della luce incidente, l'intensità totale trasmessa sarà:

$$I_T = I_0 \frac{T^2}{(A+T)^2} \frac{1}{1 + 4Rsen^2(m\pi)} = I_0 \frac{T^2}{(A+T)^2} = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2}$$

Le onde riflesse interferiscono distruttivamente per $\lambda = \lambda_m$ e l'intensità riflessa sarà zero. Questo è vero solo se $A \ll 1$ e le onde piane sono infinitamente estese e quindi le onde parziali possono completamente sovrapporsi.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.6 Rivestimenti dielettrici multi-strato

L'interferenza costruttiva dimostrata per la riflessione della luce da interfacce piane parallele tra due regioni con indice di rifrazione diverso può essere utilizzata per produrre specchi altamente riflettenti, al limite senza assorbimento.

La riflettività R all'interfaccia piana tra due regioni con indice di rifrazione complesso $n_1 = n_1' - i\kappa_1$ e $n_2 = n_2' - i\kappa_2$ può essere calcolata usando le formule di Fresnel. Essa dipende dall'angolo di incidenza α e dalla direzione di polarizzazione.

In caso di incidenza verticale ($\alpha = 0$), dalle formule di Fresnel si ottiene che sia nel caso di luce polarizzata parallelamente che perpendicolarmente al piano di incidenza, la riflettività R all'interfaccia sarà:

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

Per raggiungere alte riflettività, il numeratore $(n_1 - n_2)^2$ deve essere massimizzato e simultaneamente il denominatore minimizzato. Poiché n_1 è sempre maggiore di 1, questo implica che n_2 deve essere il più grande possibile.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.6 Rivestimenti dielettrici multi-strato

Le relazioni di Kramer-Kroning implicano che grandi valori di n si hanno quando $\omega \approx \omega_0$, a cui corrispondono sfortunatamente grossi assorbimenti.

$$n' = 1 + \frac{Ne^2}{4\varepsilon_0 m\omega_0} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

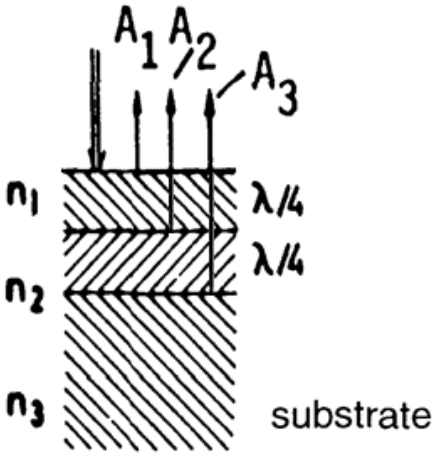
Questa situazione può essere superata selezionando materiali riflettenti con basso assorbimento, e utilizzando diversi strati che alternano un indice di rifrazione alto con uno basso.

$$\alpha = \frac{Ne^2}{4\varepsilon_0 mc} \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

In questo caso, scegliendo opportunamente lo spessore nd per ogni strato è possibile avere interferenza costruttiva tra le diverse ampiezze riflesse. Con questo approccio si possono raggiungere riflettività fino a $R = 0.9995$.

In Figura è riportato l'esempio di un rivestimento a due strati.

Gli strati con indice di rifrazione n_1 e n_2 e spessore d_1 e d_2 sono depositati su un substrato con indice di rifrazione n_3.



Le differenze di fase tra tutte le componenti riflesse devono essere pari a $\phi_m = 2m\pi$, con $m = 1,2,3 \ldots$.

$$\phi = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda}$$

$$\Delta s = m\lambda$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.6 Rivestimenti dielettrici multi-strato

Supponendo che $n_1 > n_2$ e $n_3 > n_2$, lo sfasamento di π indotto dalla riflessione all'interfaccia con uno strato con un indice di rifrazione più alto interesserà solo $\overrightarrow{A_1}$ e $\overrightarrow{A_3}$. Lo sfasamento tra $\overrightarrow{A_1}$ e $\overrightarrow{A_2}$ sarà quindi:

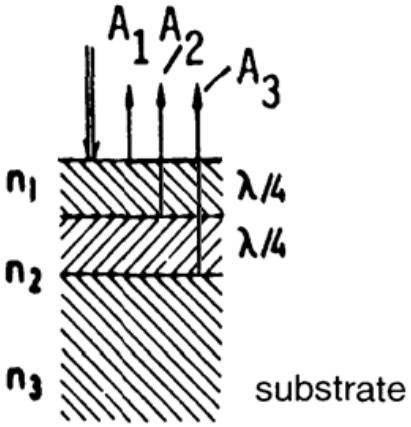
$$\phi = \frac{2\pi \Delta s}{\lambda}$$

$$\phi_{(m=1)} = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s + \pi = \frac{2\pi}{\lambda} 2n_1 d_1 + \pi = 2\pi$$

$$\phi_m = 2m\pi$$

da cui

$$n_1 d_1 = \frac{\lambda}{4}$$



Analogamente considerando lo sfasamento tra $\overrightarrow{A_2}$ e $\overrightarrow{A_3}$ per lo strato d_2 si ottiene:

$$\phi_{(m=1)} = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s + \pi = \frac{2\pi}{\lambda}(2n_2 d_2) + \pi = 2\pi$$

da cui:

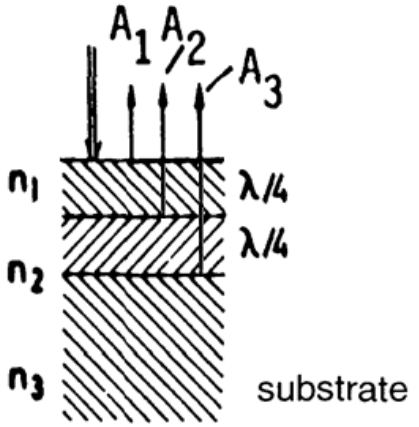
$$n_2 d_2 = \frac{\lambda}{4}$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.6 Rivestimenti dielettrici multi-strato

Le ampiezze riflesse possono essere calcolate usando le formule di Fresnel.
L'intensità totale riflesse è ottenuta sommando su tutte le ampiezze riflesse, considerando la fase corretta. Quindi, gli indici di rifrazione possono essere selezionati in modo che $\sum_i A_i$ sia massima.

Il calcolo è semplice nel caso in cui abbiamo due strati dielettrici, che porta per le tre ampiezze riflesse:



$$A_1 = \sqrt{R_1} A_0$$

$$A_2 = \sqrt{R_2}(1 - \sqrt{R_1}) A_0$$

$$A_3 = \sqrt{R_3}(1 - \sqrt{R_2})(1 - \sqrt{R_1}) A_0$$

con le riflettività R_i date dalla formula di Fresnel.

Se ad esempio si considera:

$$|n_1| = 1.6$$
$$|n_2| = 1.2$$
$$|n_3| = 1.45$$

$$\sqrt{R_1} = \left|\frac{1 - 1.6}{1 + 1.6}\right| = 0.231$$

$$\sqrt{R_2} = \left|\frac{1.6 - 1.2}{1.6 + 1.2}\right| = 0.143$$

$$\sqrt{R_3} = \left|\frac{1.2 - 1.45}{1.2 + 1.45}\right| = 0.094$$

$$R_i = \left(\frac{n_i - n_{i+1}}{n_i + n_{i+1}}\right)^2$$

$n_1 > n_2$ e $n_3 > n_2$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.6 Rivestimenti dielettrici multi-strato

si ottiene:

$$A_1 = 0.231A_0$$

$$A_2 = 0.143(1 - 0.231)A_0 = 0.110A_0$$

$$A_3 = 0.094(1 - 0.143)(1 - 0.231)A_0 = 0.062A_0$$

$$\sqrt{R_1} = 0.231$$

$$\sqrt{R_2} = 0.143$$

$$\sqrt{R_3} = 0.094$$

che porta all'ampiezza totale:

$$A_R = \sum_i A_i = 0.403A_0$$

$$A_1 = \sqrt{R_1}A_0$$

$$A_2 = \sqrt{R_2}(1 - \sqrt{R_1})A_0$$

$$A_3 = \sqrt{R_3}(1 - \sqrt{R_2})(1 - \sqrt{R_1})A_0$$

a cui corrisponde ad un'intensità riflessa pari a:

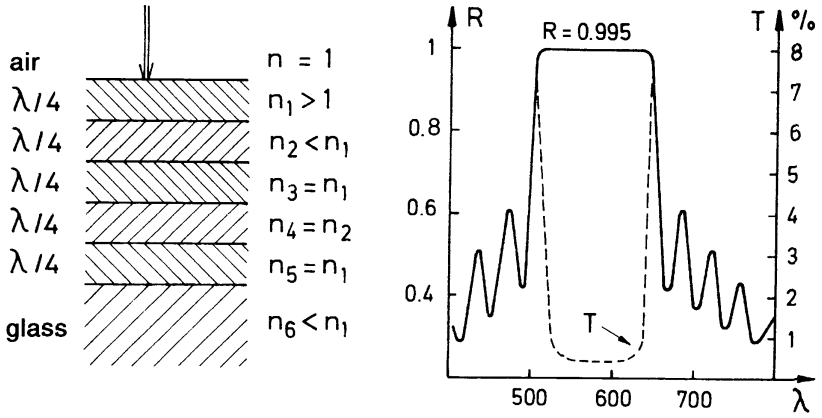
$$I_R = A_R^2 = 0.162A_0^2 = 0.162I_0$$

Considerando solamente tre strati, la riflettività ottenuta è ancora piuttosto bassa.
Per raggiungere alte riflettività occorre iterare il processo: strati multipli.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.6 Rivestimenti dielettrici multi-strato

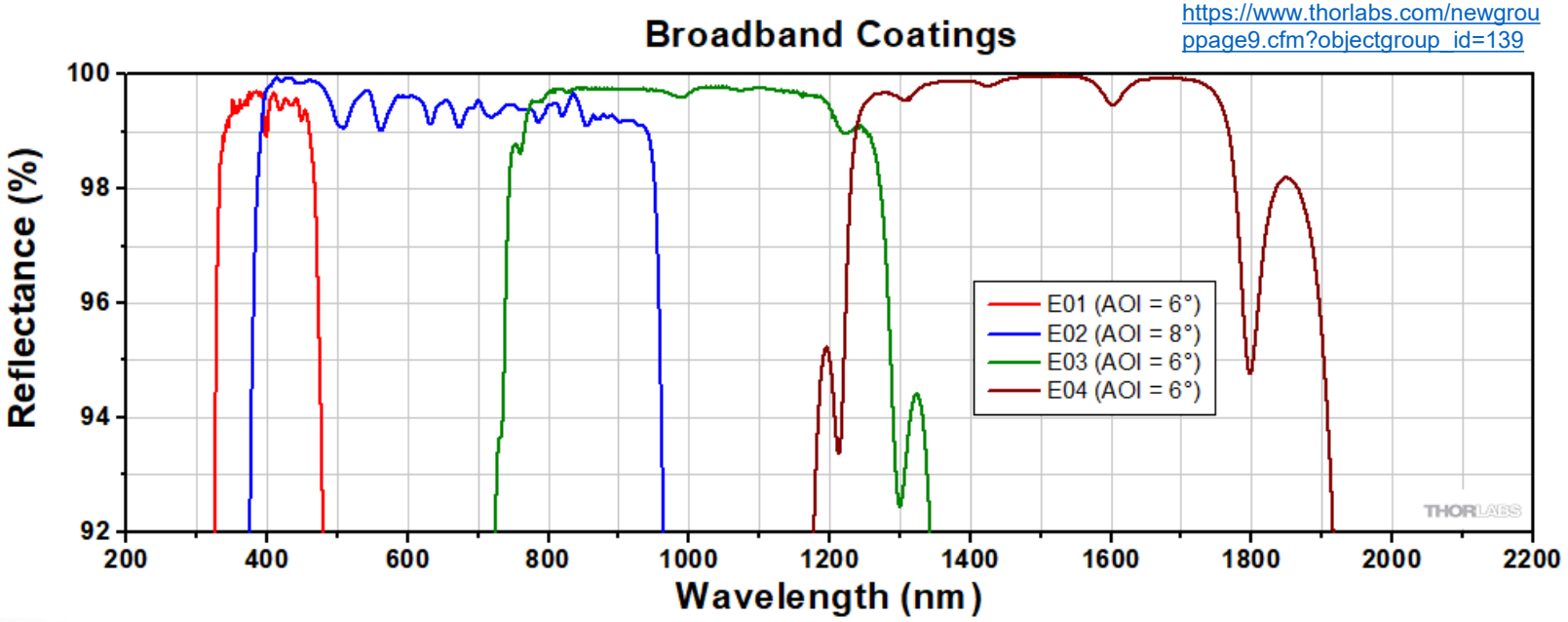
La Figura seguente mostra schematicamente la composizione di uno specchio fatto con strati multipli dielettrici.



Il calcolo e l'ottimizzazione di rivestimento a multistrato fino a 20 strati richiede l'uso di calcolatori. Selezionando opportunamente stati differenti con lievi differenze sul cammino ottico si possono ottenere alte riflettività su un esteso intervallo spettrale. Attualmente, riflettori a banda larga sono disponibili con riflettività $R > 0.99$ in un intervallo spettrale $\lambda_0 \pm 0.2\lambda_0$, con perdite per assorbimento più piccole dello 0.2 %.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.6 Rivestimenti dielettrici multi-strato



https://www.thorlabs.com/newgrouppage9.cfm?objectgroup_id=139

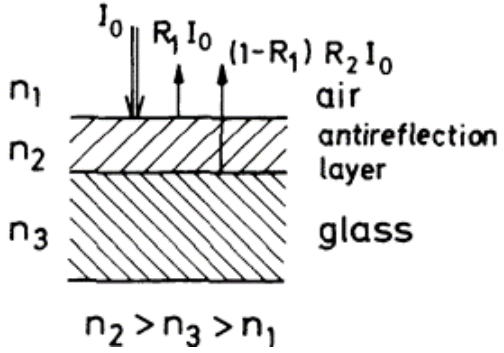
Quando le perdite per assorbimento sono così basse, le perdite dovute alle imperfezioni sulla superficie dello specchio possono diventare il contributo dominante alle perdite. In questo caso, il substrato dello specchio deve possedere un'altissima qualità, con imperfezioni di rugosità più piccole di $\frac{\lambda}{20}$.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.6 Rivestimenti dielettrici multi-strato

Invece di massimizzare la riflettività di rivestimenti dielettrici a multistrato attraverso interferenza costruttiva, è possibile anche minimizzarla attraverso interferenza distruttiva. Questi **rivestimenti antiriflesso** sono utilizzati per minimizzare le riflessioni non volute tra diverse superfici ottiche di un apparato. In spettroscopia laser, sono particolarmente utili per minimizzare le perdite in riflessione delle componenti ottiche all'interno di un risonatore laser, le quali possono generare un accoppiamento ottico non voluto e produrre instabilità in frequenza sui laser con emissione a singolo modo.

Usando un singolo strato, la riflettività raggiunge un minimo solo per una certa lunghezza d'onda. Si ottiene $I_R = 0$ per $\delta = (2m+1)\pi$, quando le due ampiezze $A_1 = \sqrt{R_1}A_0$ e $A_2 = \sqrt{R_2}(1-\sqrt{R_1})A_0$ riflesse alle interfacce (n_1, n_2) e (n_2, n_3) sono uguali.

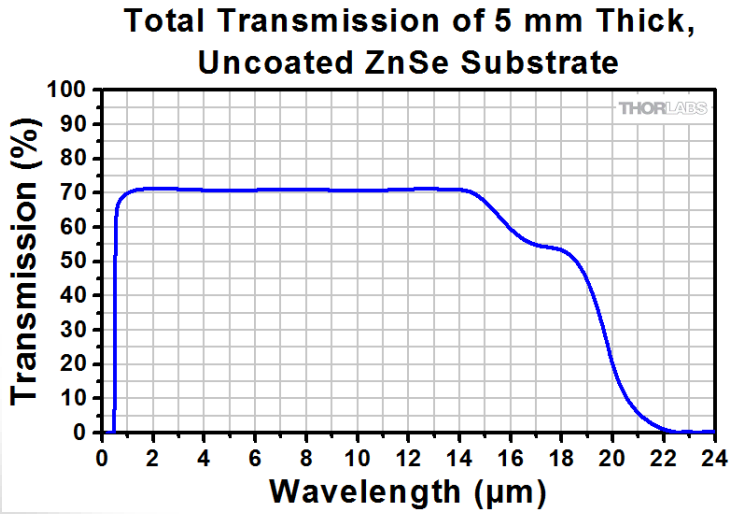


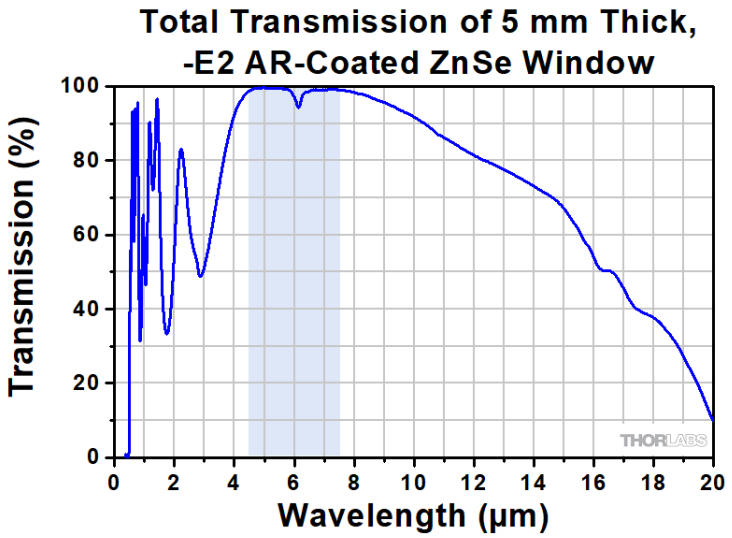
Con rivestimenti antiriflesso a multistrato, la riflettività può essere ridotta a valori < 0.2 % per ampi intervalli spettrali.

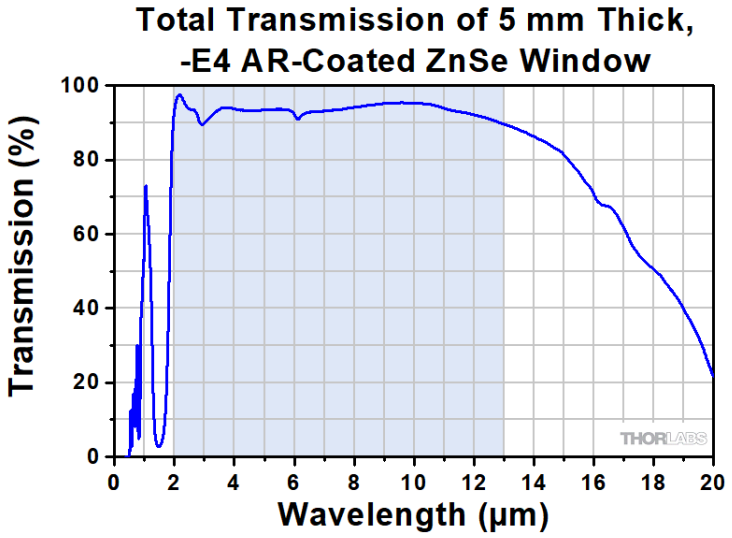
4.3 INTERFEROMETRI

4.3.6 Rivestimenti dielettrici multi-strato

https://www.thorlabs.com/newgrouppage9.cfm?objectgroup_id=3981







4.3 INTERFEROMETRI

4.3.7 Applicazioni spettroscopiche

Un interferometro traduce differenze di cammino ottico (fase) in variazioni di intensità misurabili, identificate dall'**interferogramma.**

Nel caso di radiazione monocromatica, l'interferogramma mostra un andamento sinusoidale. Nel caso di due lunghezze d'onda incidenti, il segnale assume una forma di battimento.
Estendendo a un numero elevato di lunghezze d'onda abbiamo ottenuto:

$$I_T = \sum_k \frac{1}{2} I_{0k}(1 + cos\phi_k) = \sum_k \frac{1}{2} I_{0k}(1 + cos\Delta\omega_k t)$$

Quando la sorgente è caratterizzata da uno spettro continuo, l'interferogramma può essere rappresentato da un integrale:

$$I_T = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{I}(\omega) \cos(1 + \omega t)\, d\omega$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.7 Applicazioni spettroscopiche

$$I_T(t) = I_{DC} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{I}(\omega)\cos(\omega t)\,d\omega$$

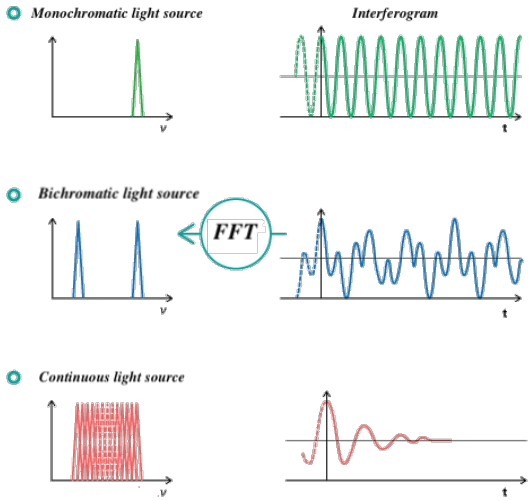
Il termine oscillante rappresenta la trasformata di Fourier in coseno dello spettro, a meno del fattore ½. Invertendo la componente oscillante si ottiene:

$$\tilde{I}(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} I(t)\cos(\omega t)\,dt = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{+\infty} I(t)\cos(\omega t)\,dt$$

L'espressione trovata mostra come in teoria, sia possibile misurare lo spettro in maniera completa ad una risoluzione infinita.

Tuttavia questo richiederebbe un'acquisizione infinitamente lunga temporalmente, o caratterizzata da un cammino ottico infinito.

La finitezza della variazione di fase rappresenta il limite ultimo per la risoluzione dell'interferometro.



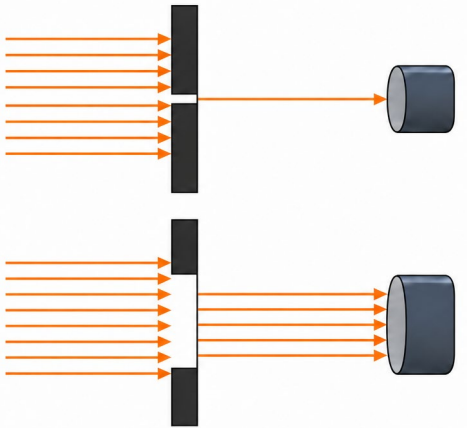
4.3 INTERFEROMETRI

4.3.7 Applicazioni spettroscopiche

Negli apparati di spettroscopia, gli interferometri sono ampiamente utilizzati per la loro capacità di coprire grandi intervalli spettrali con elevate risoluzioni.

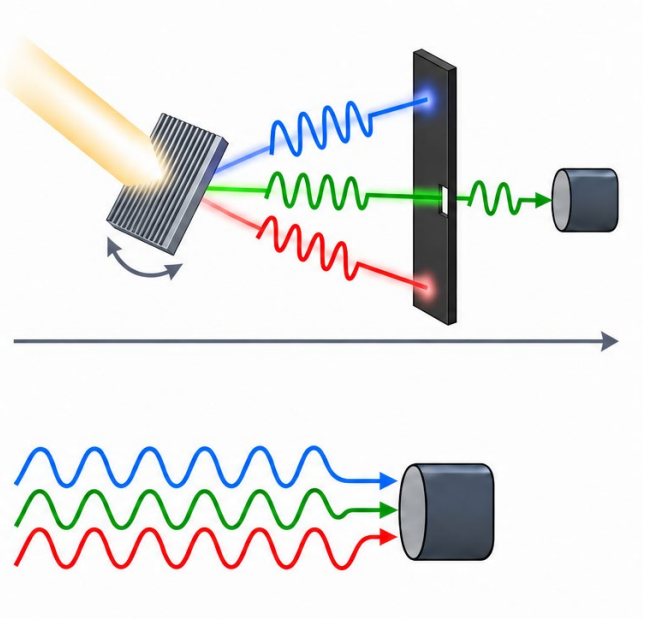
Inoltre, vengono generalmente preferiti agli spettrometri basati su grating di diffrazione per due proprietà principali:

- **Vantaggio di Jacquinot**. Gli strumenti FTIR non richiedono fenditure per ottenere un'elevata risoluzione spettrale. Possono quindi raccogliere e trasmettere una quantità di radiazione molto maggiore rispetto a uno strumento dispersivo (elevato throughput), garantendo un rapporto segnale/rumore (SNR) più elevato. Tuttavia, la spettroscopia a trasformata di Fourier richiede la collimazione dei fasci nei due bracci dell'interferometro.



4.3 INTERFEROMETRI

4.3.7 Applicazioni spettroscopiche



- **Vantaggio multiplex (vantaggio di Fellgett).** In uno spettrometro dispersivo a scansione, le diverse componenti spettrali vengono misurate in sequenza durante la rotazione del reticolo. In uno spettrometro FTIR, tutte le componenti spettrali contribuiscono contemporaneamente al segnale acquisito.

Quando il rumore è casuale e le successive misure sono indipendenti, il rapporto segnale/rumore cresce come la radice quadrata del tempo di acquisizione: $SNR \propto \sqrt{t}$.

Per raddoppiare il rapporto segnale/rumore è quindi necessario quadruplicare il tempo di misura.

Il vantaggio multiplex consente a uno spettrometro FTIR di ottenere, a parità di tempo totale di acquisizione, un rapporto segnale/rumore idealmente superiore di un fattore $\sqrt{M}$ rispetto a uno spettrometro dispersivo a scansione, dove M è il numero di elementi di risoluzione spettrale.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.7 Applicazioni spettroscopiche

Di conseguenza, per ottenere lo stesso rapporto segnale/rumore, il tempo di acquisizione può essere ridotto di un fattore M.

Esempio: Si vuole effettuare una misura nella banda compresa tra 800 e 8000 cm^{-1}, effettuando un'acquisizione con risoluzione di 2 cm^{-1}. Lo spettro contiene quindi circa $M = 3600$ elementi di risoluzione.

- Per ottenere un dato SNR, uno spettrometro dispersivo impiega 30 minuti per acquisire per l'intera banda, dedicando quindi mediamente 0.5 secondi a ciascun elemento.
- Lo stesso SNR viene ottenuto da un interferometro nel tempo necessario allo spettrometro dispersivo per acquisire un singolo elemento di risoluzione ($t = 0.5$ s)

Analogamente, a parità di tempo di acquisizione, vale l'espressione:

$$\frac{SNR_{FTIR}}{SNR_{disp}} = \sqrt{M}$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.7 Applicazioni spettroscopiche

La scelta di utilizzare un interferometro con sorgenti a banda larga o a banda stretta dipende dall'applicazione spettroscopica desiderata.

A seconda del target della misura è possibile anche preferire una specifica configurazione sperimentale.

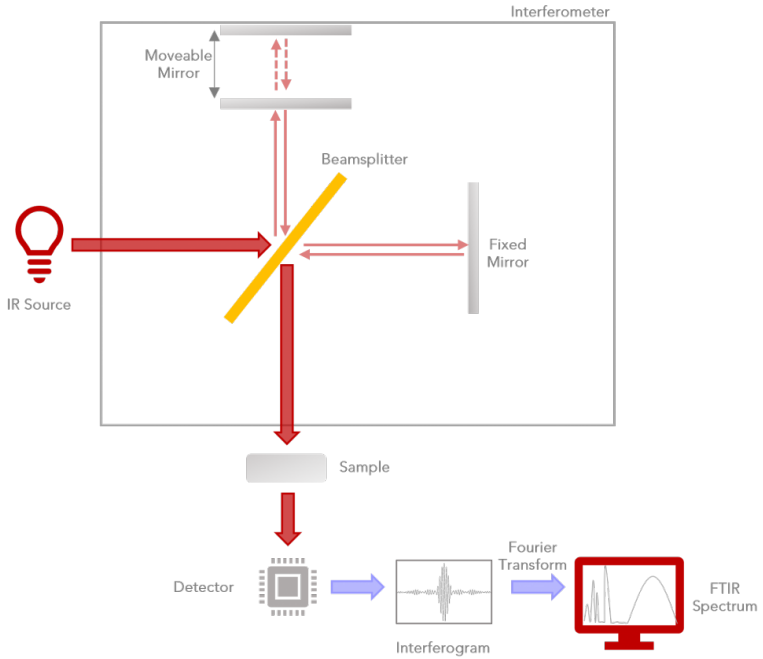
Applicazione	Grandezza ricavata	Esempio
Spettroscopia a trasformata di Fourier	Distribuzione spettrale della radiazione	FTIR con Michelson
Rifrattometria interferometrica	Variazione di fase e cammino ottico	Mach–Zehnder con campione in un braccio
Selezione spettrale	Frequenze di risonanza	Etalon Fabry–Pérot

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.7 Applicazioni spettroscopiche

Per la valutazione delle bande di assorbimento, la configurazione tipica prevede l'utilizzo di un interferometro di Michelson con sorgente broadband (blackbody).

Questo tipo di configurazione prevede di posizionare il **campione a valle** dell'interferometro, in modo da attribuire la variazione di fase esclusivamente alla variazione di cammino ottico indotto dallo specchio mobile.



Questa prende il nome di **spettroscopia FTIR in trasmissione.**

Lo spettro di assorbimento viene quindi ottenuto andando a confrontare l'interferogramma ottenuto prima e dopo l'inserimento del campione lungo la direzione del fascio.

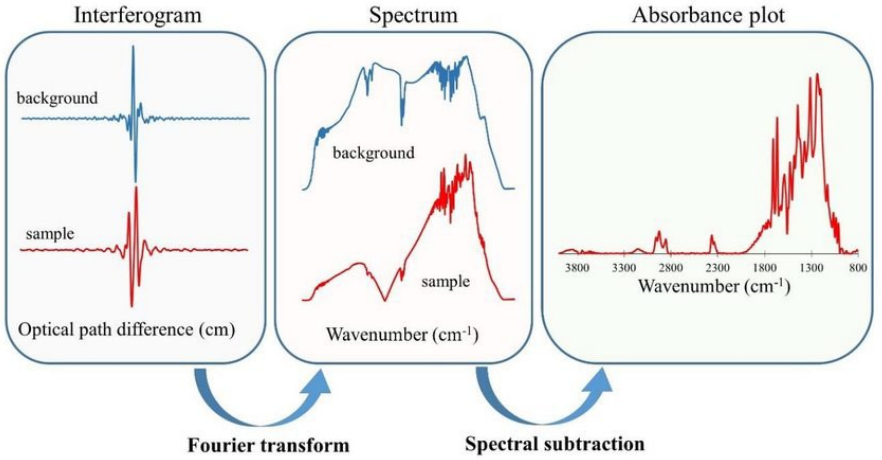
4.3 INTERFEROMETRI

4.3.7 Applicazioni spettroscopiche

La misura avviene quindi in due fasi consecutive, ciascuna caratterizzata dall'acquisizione dell'interferogramma e dalla successiva trasformata di Fourier.

Si ottengono due spettri:

- uno relativo alla sorgente ed all'interferometro (background), I_{bg}
- uno relativo al background più il contributo del campione, I_{sample}



Lo spettro di assorbimento del campione viene quindi ottenuto dalla relazione:

$$A = -\log_{10} T = -\log_{10}\left(\frac{I_{sample}}{I_{bg}}\right)$$

dove A rappresenta l'**assorbanza decimale**, espressa a partire dalla trasmittanza T.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.7 Applicazioni spettroscopiche

L'assorbanza ottenuta in questo modo viene rapportata alle proprietà di assorbimento del campione mediante la legge di Lambert-Beer espressa in termini di **assorbività molare** ε:

$$A = -\log_{10} T = \varepsilon \cdot c \cdot L$$

dove c rappresenta la concentrazione del target assorbente, L la lunghezza del cammino ottico.

La grandezza ottenuta è analoga a quella ricavata nel capitolo **2.1.3**:

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\alpha L} = 10^{-\varepsilon c L}$$

Si ottengono due significati fisici simili, ma non identici:

- con il logaritmo naturale si ottiene la profondità ottica
- con il logaritmo in base 10 si definisce l'assorbanza decimale

$$A = \frac{\alpha L}{\ln(10)}$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.7 Applicazioni spettroscopiche

Nell'approccio FTIR standard la radiazione attraversa uno spessore noto L del campione.

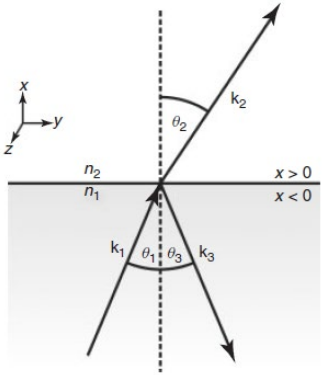
Questa richiesta non è sempre possibile, e presenta limitazioni in presenza di campioni estremamente assorbenti (opachi) o con spessore variabile o difficilmente controllabile.

Un approccio alternativo prevede l'utilizzo del fenomeno della **riflessione totale.**

Consideriamo un'onda piana incidente da un mezzo trasparente di indice n_1 su un campione caratterizzato dall'indice di rifrazione complesso:

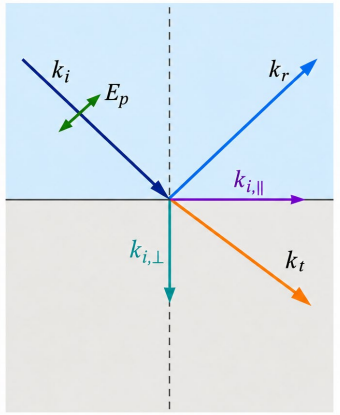
$$\hat{n}_2 = n_2 + i\kappa_2$$

La parte reale descrive la propagazione della fase, mentre κ_2 determina l'assorbimento.



4.3 INTERFEROMETRI

4.3.7 Applicazioni spettroscopiche



La continuità delle componenti tangenziali dei campi elettrico e magnetico impone la conservazione della frequenza e della componente del vettore d'onda parallela all'interfaccia:

$$k_{\parallel} = \frac{\omega}{c} n_1 \sin\theta_1 = \frac{\omega}{c} \hat{n}_2 \sin\theta_2$$

Applicando le condizioni al contorno si ottengono i coefficienti di riflessione di Fresnel.

Ponendo $q = \sqrt{\hat{n}_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_1}$, si ottiene:

$$r_s = \frac{n_1 \cos\theta_1 - q}{n_1 \cos\theta_1 + q}, \qquad r_p = \frac{\hat{n}_2^2 \cos\theta_1 - n_1 q}{\hat{n}_2^2 \cos\theta_1 + n_1 q}$$

Le riflettanze sono $R_s = |r_s|^2$ e $R_p = |r_p|^2$.

Per un campione non assorbente, con $n_1 > n_2$, si ha riflessione totale interna quando:

$$\theta_1 > \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right), \qquad R_s = R_p = 1$$

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.7 Applicazioni spettroscopiche

Nel caso non assorbente, la relazione di dispersione nel campione impone:

$$k_{\perp,2}^2 = \left(\frac{2\pi n_2}{\lambda_0}\right)^2 - k_{\parallel}^2$$

Per $\theta_1 > \theta_c$, la componente normale del vettore d'onda diventa immaginaria:

$$k_{\perp,2} = i\gamma, \qquad \gamma = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{n_1^2 \sin^2\theta_1 - n_2^2}.$$

Indicando con z la distanza dall'interfaccia e con y la coordinata parallela ad essa, il campo nel campione assume la forma:

$$\boldsymbol{E}_2(y,z,t) = \boldsymbol{E}_{02}\, e^{i(k_{\parallel} y - \omega t)} e^{-\gamma z}$$

Il campo presenta quindi una variazione di fase lungo l'interfaccia e un decadimento esponenziale nella direzione normale.

4.3 INTERFEROMETRI

4.3.7 Applicazioni spettroscopiche

$$\boldsymbol{E}_2(y,z,t) = \boldsymbol{E}_{02}\, e^{i(k_{\parallel} y - \omega t)} e^{-\gamma z}$$

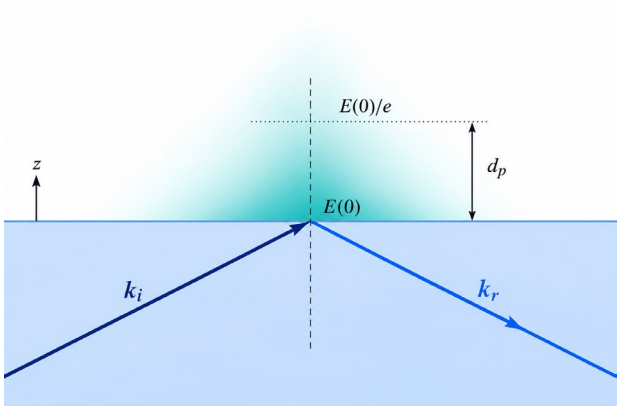
La profondità di penetrazione viene definita come:

$$d_p = \frac{1}{\gamma} = \frac{\lambda_0}{2\pi\sqrt{n_1^2 \sin^2\theta_1 - n_2^2}}$$

A $z = d_p$, l'ampiezza si riduce a $1/e$, mentre $|E|^2$ si riduce a $1/e^2$.

Se il campione assorbe, l'interazione con questo campo determina un trasferimento di energia al campione e una riduzione della riflettanza: $R < 1$.

La formula di d_p sopra riportata viene utilizzata anche nell'approssimazione di debole assorbimento.



4.3 INTERFEROMETRI

4.3.7 Applicazioni spettroscopiche

Per una singola riflessione, rispetto al riferimento ideale non assorbente, si definisce:

$$A_{\mathrm{ATR}} = -\log_{10} R = \alpha_{10} d_e, \qquad \alpha_{10} = \frac{4\pi\kappa_2}{\lambda_0 \ln 10}.$$

Lo spessore efficace d_e è lo spessore che, in trasmissione a incidenza normale, produrrebbe la stessa assorbanza. È distinto da d_p, poiché tiene conto anche dell'ampiezza del campo all'interfaccia e della polarizzazione.

Nell'approssimazione di debole assorbimento, ponendo $\eta = n_2/n_1$ e $\theta = 45°$:

$$d_{e,s} = d_p \frac{\sqrt{2}\,\eta}{1-\eta^2}, \qquad d_{e,p} = 2 d_{e,s}$$

Mantenendo costanti le condizioni ottiche e il contatto con il cristallo, d_e è approssimativamente indipendente dalla concentrazione e si recupera una relazione analoga alla legge di Beer–Lambert:

$$A_{\mathrm{ATR}} \simeq \varepsilon c, d_e, \qquad A_N = -\log_{10}(R^N) \simeq N\varepsilon c, d_e$$

L'ultima relazione vale per N riflessioni equivalenti, considerando separatamente ciascuna polarizzazione.